Aussagen und Mengentheoretische Begriffe

Aussagen und Aussageformen

In der Mathematik spricht man von **Aussagen,** wenn für einen Sachverhalt entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist. Dieser Sachverhalt wird meist in Form eines Satzes dargestellt,
kann aber auch rein mathematisch durch Gleichungen oder Ungleichungen angegeben werden.

Beispiel: Sachverhalt in Form eines Satzes.

Aussage 1

A_1 :   Brüssel ist die Hauptstadt von Belgien

Antwort:

$w(A_1) = W$

Das bedeutet: Der Wahrheitsgehalt der Aussage A_1 ist wahr.

$w(A_1)$ Wahrheitsgehalt der Aussage A_1

$= W$ ist wahr

$= F$ ist falsch

Beispiel: Sachverhalt mathematisch.

Aussage 2

A_2 : $15 < 7$

Antwort:

$w(A_2) = F$

Das bedeutet: Der Wahrheitsgehalt der Aussage A_2 ist falsch.

Definition	Eine Aussage ist ein Sachverhalt, dessen Wahrheitsgehalt eindeutig bestimmbar ist.

Keine Aussagen im Sinne der Definition sind:

- Guten Tag
- Lieben Sie Brahms ?
- Nachts ist es kälter als draußen

Treten in einer Aussage Variable (Platzhalter) auf und lässt sich der Wahrheitsgehalt nur durch Einsetzen geeigneter Begriffe feststellen, so spricht man von **Aussageformen.**

Beispiel:

Aussageform $A(\Delta):\Delta$ ist ein Vokal

Setzt man für den Platzhalter einen Buchstaben ein, so wird die Aussageform zu einer Aussage, deren Wahrheitsgehalt überprüft werden kann.

$\Delta = m$

Die Aussage lautet: $A(m): m$ ist ein Vokal

Wahrheitsgehalt: $w(A) = F$

$\Delta = i$

Die Aussage lautet: $A(i): i$ ist ein Vokal

Wahrheitsgehalt : $w(A) = W$

Eine Bestimmungsgleichung ist eine Aussageform **A(x)**. Durch Einsetzen einer Zahl für den Platzhalter x kann der Wahrheitsgehalt der Aussage ermittelt werden.

Beispiel:

Aussageform:**A(x): x + 7 = 15**

x = 8 **A: 8 + 7 = 15**

w(A) = W

Definition	Eine Aussageform ist ein Sachverhalt, der mindestens eine Variable enthält und durch Einsetzen geeigneter Begriffe anstelle des Platzhalters zu einer Aussage führt.

Verknüpfung von Aussagen

Werden Aussagen miteinander verknüpft, so entstehen zusammengesetzte Aussagen, deren Wahrheitsgehalt in der angegebenen Verbindung wieder überprüft werden kann.

Beispiel:

A_1: 4 ist eine gerade Zahl
A_2: $4 > 2$

$w(A_1) = W$
$w(A_2) = W$

A_1 **und** A_2 = A_{12} : 4 ist eine gerade Zahl **und** $4 > 2$

$w(A_{12}) = W$

Die Konjunktion

Verknüpfungszeichen **und**: $\wedge$ (logisch und)

Definition	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr ist, wenn sowohl A_1 als auch A_2 wahr ist, so heißt diese Verknüpfung **Konjunktion**

Wahrheitstafel		
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \wedge A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel: $A_1(x)$: $x - 3 = 5$
$A_2(x)$: $x < 10$

Für x = 9 gilt:

A_1: $9 - 3 = 5$
A_2: $9 < 10$

$w(A_1) = F$
$w(A_2) = W$

Verknüpfung: A_{12}: $= A_1 \wedge A_2$
A_{12}: $9 - 3 = 5 \wedge 9 < 10$

$w(A_{12}) = F$

Merke	Die Konjunktion zweier Aussagen A_1 und A_2 ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Die Disjunktion

Verknüpfungszeichen **oder**: $\vee$ (logisch oder)

Definition	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage immer dann wahr ist, wenn entweder die eine oder die andere oder beide Aussagen wahr sind, so heißt diese Verknüpfung **Disjunktion**

Wahrheitstafel		
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \vee A_2)$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel: $A_1(x)$: $2x = 14$

$A_2(x)$: $x \geq 6$

x = 7

$$A_1 : 2 \cdot 7 = 14 \quad w(A_1) = W$$
$$A_2 : 7 \geq 6 \quad w(A_2) = W$$
$$A_{12} = A_1 \vee A_2 \quad w(A_{12}) = W$$

Merke	Die Disjunktion zweier Aussagen A_1 und A_2 ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

Die Subjunktion

Verknüpfungszeichen **wenn .... dann**: $\rightarrow$

Definition	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass untenstehende Wahrheitstafel gilt, so heißt diese Verknüpfung **Subjunktion**

Wahrheitstafel		
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \rightarrow A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Merke	Die Subjunktion zweier Aussagen A_1 und A_2 ist genau dann falsch, wenn A_1 wahr und A_2 falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr.

Die Implikation

Verknüpfungszeichen **daraus folgt**: $\Rightarrow$

Definition	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass aus der Aussage A_1 die Aussage A_2 **logisch folgt**, so heißt diese Verknüpfung **Implikation.**

Warheitstafel		
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \Rightarrow A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Die Äquivalenz

Verknüpfungszeichen **genau dann .... wenn**: $\Leftrightarrow$

Definition	Die wechselseitige Implikation heißt **Bijunktion** oder **Äquivalenz**

Warheitstafel		
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \Leftrightarrow A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Die Wahrheitstafel entspricht der Implikation, dabei können die Aussagen A_1 und A_2 jedoch vertauscht werden. Die Verknüpfung der beiden Aussagen über die Äquivalenz führt genau dann zu einer wahren Aussage, wenn der Wahrheitsgehalt beider Aussagen gleich (äquivalent) ist.

Beispiel: Ein mathematischer Satz lautet:
Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

A_1: Die Quersumme der Zahl x ist durch 3 teilbar
A_2: Die Zahl x ist durch 3 teilbar

x = 39 Quersumme = 12 3 **|** 12 und 3 **|** 39

A_1: Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar ⇒ A_2: Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

A_2: Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar
⇒ A_1: Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar

A_1: Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar
⇔ A_2: Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

Die Negation

Verknüpfungszeichen **nicht**: $\neg$

Definition	Die Negation einer Aussage ist immer dann wahr, wenn die Aussage falsch ist, und immer dann falsch, wenn die Aussage wahr ist

Wahrheitstafel	
w(A)	w($\neg$ A)
W	F
F	W

Beispiel: A: 5 ist eine ungerade Zahl w(A) = W
$\neg$A: 5 ist keine ungerade Zahl w($\neg$A) = F

Satz	Die doppelte Negation einer Aussage führt wieder zur ursprünglichen Aussage

Beweis mittels Wahrheitstafel:

Beispiel:
A: Der Schüler ist **fähig**, die Aufgabe zu lösen.
$\neg$A: Der Schüler ist **unfähig,** die Aufgabe zu lösen.

$\neg(\neg$A): Der Schüler ist **nicht unfähig** die Aufgabe zu lösen

w(A)	W($\neg$A)	w($\neg(\neg$A))
W	F	W
F	W	F

Zusammenfassung:

Konjunktion			Disjunktion		
w(A_1)	w(A_2)	w($A_1 \wedge A_2$)	w(A_1)	w(A_2)	w($A_1 \vee A_2$)
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	W
F	W	F	F	W	W
F	F	F	F	F	F
Subjunktion			**Implikation**		
w(A_1)	w(A_2)	w($A_1 \rightarrow A_2$)	w(A_1)	w(A_2)	w($A_1 \Rightarrow A_2$)
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	F
F	F	W	F	F	W
Äquivalenz			**Negation**		
w(A_1)	w(A_2)	w($A_1 \Leftrightarrow A_2$)	w(A)	w($\neg$A)	
W	W	W	W	F	
W	F	F	F	W	
F	W	F			
F	F	W			

Verknüpfungsaufgaben

$A \vee \neg B$ Erstelle die Wahrheitstafel

W(A)	w(B)	w(A)	w($\neg$B)	w(A$\vee\neg$B)
W	W	W	F	W
W	F	W	W	W
F	W	F	F	F
F	F	F	W	W

$\neg A \wedge \neg B$ Erstelle die Wahrheitstafel

W(A)	w(B)	w($\neg$A)	w($\neg$B)	w($\neg$A$\wedge\neg$B)
W	W	F	F	F
W	F	F	W	F
F	W	W	F	F
F	F	W	W	W

$\neg A \rightarrow B$ Erstelle die Wahrheitstafel

W(A)	w(B)	w($\neg$A)	w($\neg$A$\rightarrow$B)
W	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	W
F	F	W	F

Aufgaben

1. a) Beweisen Sie: $\neg A \wedge \neg B = \neg(A \vee B)$
   b) Beweisen Sie: $\neg A \rightarrow B = A \vee B$

Lösung:

a)

w(A)	w(B)	w($\neg$A)	w($\neg$B)	$w\left(\neg A \wedge \neg B\right)$	$w\left(\neg\left(A \vee B\right)\right)$
W	W	F	F	**F**	**F**
W	F	F	W	**F**	**F**
F	W	W	F	**F**	**F**
F	F	W	W	**W**	**W**

b)

w(A)	w(B)	w($\neg$A)	w(B)	$w\left(\neg A \rightarrow B\right)$	$w\left(A \vee B\right)$
W	W	F	W	**W**	**W**
W	F	F	F	**W**	**W**
F	W	W	W	**W**	**W**
F	F	W	F	**F**	**F**

2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu:

a) $A \wedge \neg A$
b) $A \vee \neg A$
c) $A \rightarrow \neg B$
d) $\neg A \Leftrightarrow B$
e) $\neg(\neg A) \wedge B$
f) $\neg(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
g) $\neg(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$
h) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$
i) $(A \wedge B) \wedge (A \wedge \neg B)$

Lösung:

a)

$w(A)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge \neg A)$
W	F	F
F	W	**F**

b)

$w(A)$	$w(\neg A)$	$w(A \vee \neg A)$
W	F	W
F	W	**W**

c)

$w(A)$	$w(B)$	$w(A)$	$w(\neg B)$	$w(A \rightarrow \neg B)$
W	W	W	F	**F**
W	F	W	W	**W**
F	W	F	F	**W**
F	F	F	W	**W**

d)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(B)$	$w(\neg A \Leftrightarrow B)$
W	W	F	W	**F**
W	F	F	F	**W**
F	W	W	W	**W**
F	F	W	F	**F**

e)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(\neg A))$	$w(B)$	$w(\neg(\neg A) \wedge B)$
W	W	W	W	**W**
W	F	W	F	**F**
F	W	F	W	**F**
F	F	F	F	**F**

f)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \wedge \neg B))$	$w(\neg A \wedge B)$
W	W	F	F	F	W	F
W	F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	W	F

$w(\neg(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$
W
F
W
W

g)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(A \vee \neg B)$	$w(\neg(A \vee \neg B))$	$w(\neg A)$	$w(\neg A \vee B)$
W	W	F	W	F	F	W
W	F	W	W	F	F	F
F	W	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W

$w(\neg(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B))$
F
F
W
F

h)

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \vee B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg A \vee B)$	$w((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B))$
W	W	W	F	W	**W**
W	F	W	F	F	**F**
F	W	W	W	W	**W**
F	F	F	W	W	**F**

i)

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge \neg B)$	$w((A \wedge B) \wedge (A \wedge \neg B))$
W	W	W	F	F	**F**
W	F	F	W	W	**F**
F	W	F	F	F	**F**
F	F	F	W	F	**F**

3. Beweisen Sie:
   a) $\neg(\neg A \vee B) = A \vee \neg B$
   b) $\neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee B$
   c) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
   d) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   e) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

a)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg A \vee B)$	$w(\neg(\neg A \vee B))$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge \neg B)$
W	W	F	W	**F**	F	**F**
W	F	F	F	**W**	W	**W**
F	W	W	W	**F**	F	**F**
F	F	W	W	**F**	W	**F**

b)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \wedge \neg B))$	$w(\neg A)$	$w(\neg A \vee B)$
W	W	F	F	**W**	F	**W**
W	F	W	W	**F**	F	**F**
F	W	F	F	**W**	W	**W**
F	F	W	F	**W**	W	**W**

c)

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$W(\neg(A \wedge B))$	$w(\neg A)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A \vee \neg B)$

W	W	W	**F**	F	F	**F**
W	F	F	**W**	F	W	**W**
F	W	F	**W**	W	F	**W**
F	F	F	**W**	W	W	**W**

d)

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(B \vee C)$	$w(A \wedge (B \vee C))$	$w(A \wedge B)$	$w(A \wedge C)$
W	W	W	W	**W**	W	W
W	W	F	W	**W**	W	F
W	F	W	W	**W**	F	W
F	W	W	W	**F**	F	F
W	F	F	F	**F**	F	F
F	W	F	W	**F**	F	F
F	F	W	W	**F**	F	F
F	F	F	F	**F**	F	F

$w((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
W
W
W
F
F
F
F
F

e)

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(B \wedge C)$	$w(A \vee (B \wedge C))$	$w(A \vee B)$	$w(A \vee C)$
W	W	W	W	**W**	W	W
W	W	F	F	**W**	W	W
W	F	W	F	**W**	W	W
F	W	W	W	**W**	W	W
W	F	F	F	**W**	W	W
F	W	F	F	**F**	W	F
F	F	W	F	**F**	F	W
F	F	F	F	**F**	F	F

$w((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
W
W
W
W
W
F
F
F