Die rechnerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Das Gleichsetzungsverfahren

Lösungsschritte

Gleichungssystem

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

1. Beide Gleichungen nach derselben Variablen auflösen:

z.B. nach *y*:

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \;|\; -5x$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \;|\; -3x$$

$$\text{(I)}\quad -2y = 1 - 5x \;|: (-2)$$
$$\text{(II)}\quad 3y = 9 - 3x \;|: 3$$

$$\text{(I)}\quad y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}x$$
$$\text{(II)}\quad y = \frac{9}{3} - \frac{3}{3}x$$

$$\text{(I)}\quad y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$\text{(II)}\quad y = -x + 3$$

2. Die gefundenen Terme der rechten Seiten gleichsetzen. So entsteht eine Gleichung mit einer Variablen, die man lösen kann. Man erhält den Wert der ersten Variablen.

$$\text{(I)} = \text{(II)}\quad \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = -x + 3 \;|\; +x$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}x + x - \frac{1}{2} = 3 \;|\; +\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}x + x = 3 + \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}x = \frac{7}{2} \;|: \frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

3. Den gefundenen Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzen. So erhält man den Wert der zweiten Variablen.

$x = 1$ eingesetzt in (II):

$$y = -(1) + 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

4. Lösungsmenge aufschreiben

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

Probe:

$$\text{(I)}\quad 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3 + 6 = 9$$

Das Einsetzungsverfahren

Lösungsschritte	Gleichungssystem	
	(I) $5x-2y=1$ (II) $3x+3y=9$	
1. Eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen auflösen	Wir lösen z.B. Gleichung (I) nach x auf: $5x-2y=1 \mid +2y$ (I) $\Leftrightarrow 5x=2y+1 \mid :5$ $\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}$	oder: Wir lösen z.B. Gleichung (II) nach y auf: $3x+3y=9 \mid -3x$ $\Leftrightarrow 3y=9-3x \mid :3$ $\Leftrightarrow y=3-x$
2. Den gefundenen Term der rechten Seite in die andere Gleichung einsetzen. Auch hier entsteht eine Gleichung mit einer Variablen, die man lösen kann. Man erhält den Wert der ersten Variablen.	$x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}$ eingesetzt in (II) $3\left(\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}\right)+3y=9$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+\frac{3}{5}+3y=9 \mid -\frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+3y=9-\frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{21}{5}y=\frac{42}{5} \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 21y=42 \mid :21$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$	$y=3-x$ eingesetzt in (I) $5x-2(3-x)=1$ $\Leftrightarrow 5x-6+2x=1 \mid +6$ $\Leftrightarrow 5x+2x=1+6$ $\Leftrightarrow 7x=7 \mid :7$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$
3. Den gefundenen Wert in die andere Gleichung einsetzen. So erhält man den Wert der zweiten Variablen.	$y=2$ eingesetzt in (I): $5x-2\cdot 2=1$ $\Leftrightarrow 5x-4=1 \mid +4$ $\Leftrightarrow 5x=5 \mid :5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$	$x=1$ eingesetzt in (II): $3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y=9-3$ $\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$
4. Lösungsmenge aufschreiben	$\underline{\underline{L=\{(1\mid 2)\}}}$	
Probe:	(I) $5\cdot 1-2\cdot 2=5-4=1$ (II) $3\cdot 1+3\cdot 2=3+6=9$	

Das Additionsverfahren

Lösungsschritte — **Gleichungssystem**

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 5x - 2y = 1 \\ \text{(II)}\quad & 3x + 3y = 9 \end{aligned}$$

1. Gleichungen äquivalent so umformen, dass die Vorzahlen einer Variablen bis auf das Vorzeichen übereinstimmen.

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 5x - 2y = 1 \,|\cdot 1{,}5 \\ \text{(II)}\quad & 3x + 3y = 9 \\ \hline \text{(I)}\quad & 7{,}5x - 3y = 1{,}5 \\ \text{(II)}\quad & 3x + 3y = 9 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 5x - 2y = 1 \,|\cdot 3 \\ \text{(II)}\quad & 3x + 3y = 9 \,|\cdot 2 \\ \hline \text{(I)}\quad & 15x - 6y = 3 \\ \text{(II)}\quad & 6x + 6y = 18 \end{aligned}$$

2. Die entstandenen Gleichungen addieren. Es entsteht eine Gleichung mit einer Variablen, die man lösen kann. Man erhält den Wert der ersten Variablen.

$$\left.\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 7{,}5x - 3y = 1{,}5 \\ \text{(II)}\quad & 3x + 3y = 9 \end{aligned}\right\}+$$

$$10{,}5x = 10{,}5 \,|: 10{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 15x - 6y = 3 \\ \text{(II)}\quad & 6x + 6y = 18 \end{aligned}\right\}+$$

$$21x = 21 \,|\, 21$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

3. Den gefundenen Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzen. Man erhält den Wert der zweiten Variablen.

$x = 1$ eingesetzt in (II):

$$\begin{aligned} & 3\cdot 1 + 3y = 9 \\ \Leftrightarrow\ & 3 + 3y = 9 \,|\, -3 \\ \Leftrightarrow\ & 3y = 9 - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 3y = 6 \,|: 3 \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = 2}} \end{aligned}$$

$x = 1$ eingesetzt in (I):

$$\begin{aligned} & 5\cdot 1 - 2y = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 5 - 2y = 1 \,|\, -5 \\ \Leftrightarrow\ & -2y = 1 - 5 \\ \Leftrightarrow\ & -2y = -4 \,|: (-2) \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = 2}} \end{aligned}$$

4. Lösungsmenge aufschreiben

$$\underline{\underline{L = \{(1\,|\,2)\}}}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad & 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 5 - 4 = 1 \\ \text{(II)}\quad & 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

Gleichungssystem ohne Lösung

Gleichungssystem: $\begin{array}{ll} \text{(I)} & 5x+2y=1 \\ \text{(II)} & 10x+4y=4 \end{array}$

Lösung nach dem Additionsverfahren:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -10x-4y & = & -2 \\ \text{(II)} & 10x+4y & = & 4 \\ \hline & 0 & = & 2 \rightarrow \text{ falsche Aussage} \end{array}$$

Der Lösungsansatz führt zu einer falschen Aussage. Es existiert keine Lösung des Gleichungssystems. $\underline{\underline{L=\{\ \}}}$

Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 5x+2y=1 \\ \text{(II)} & 10x+4y=2 \\ \hline \text{(I)} & 10x+4y=2 \\ \text{(II)} & 10x+4y=2 \\ \hline \end{array}$$

Wir stellen fest, dass Gleichung (I) und Gleichung(II) äquivalent sind.
Jedes Zahlenpaar, das (I) erfüllt, erfüllt folglich auch (II).
Die gemeinsame Lösungsmenge besteht deshalb aus unendlich vielen Zahlenpaaren. $\underline{\underline{L=\{(x\mid y)\mid 10x+4y=2\}}}$