Polynomgleichungen

Verschiedene Potenzen von x auf der linken und rechten Seite einer Gleichung ergeben eine Polynomgleichung.

Beispiel: $x^3 - 6x = 3x^2 - 8$

Um eine solche Gleichung zu lösen, bringt man sie zunächst auf die sogenannte Nullform. Das bedeutet, die Gleichung wird solange mittels Äquivalenzumformung bearbeitet, bis auf der rechten Seite nur noch die Null steht.

Beispiel: $x^3 - 6x = 3x^2 - 8 \mid -3x^2$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x = -8 \mid +8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

Statt Nullform sagt man zu dieser Form der Polynomgleichung auch Normalform.

Man unterscheidet mehrere Varianten von Polynomgleichungen, für die es unterschiedliche Lösungsverfahren gibt. Um die jeweilige Variante zu erkennen, ist es erforderlich, die Polynomgleichung wie oben beschrieben, auf die Nullform zu bringen.

Variante 1: In der Gleichung kommt nur eine einzige Potenz der Variablen x vor.

$$ax^n + b = 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

Falls n <u>ungerade</u> ist, darf der Radikand auch negativ sein.
Es gibt genau eine Lösung der Wurzel.
Falls n <u>gerade</u> ist, darf der Radikand nur positiv sein.
Es gibt zwei Lösungen.
Beispiele:

$$8x^3 + 27 = 0 \mid -27$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 = -27 \mid :8$$

$$\Leftrightarrow x^3 = -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}}}$$

$$2x^4 - 3 = 0 \mid +3$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 = 3 \mid :2$$

$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}}}$$

Im ersten Fall ist n ungerade und der Radikand negativ.
Im zweiten Fall ist n gerade und der Radikand positiv.
Wäre er negativ, dann würde sich die Wurzel und damit die Gleichung nicht lösen lassen.

Variante 2: Die Polynomgleichung stellt eine quadratische Gleichung dar.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

Diese lässt sich mithilfe der p-q-Formel berechnen.

Beispiel:

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{4;9\}}}$$

D steht für Diskriminante anhand der man die Anzahl der Lösungen schon vor der entgültigen Berechnung bestimmen kann.

D > Null: Die quadratische Gleichung hat 2 Lösungen.

D = Null: Die quadratische Gleichung hat nur eine Lösung (-p/2) .

D < Null: Die quadratische Gleichung hat keine Lösung.

In diesem Fall braucht man an dieser Stelle nicht weiterrechnen.

Variante 3: Die Polynomgleichung stellt eine biquadratische Gleichung dar.

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

Die Substitutionsvariable z lässt sich mithilfe der p-q-Formel berechnen. Anschließend muss zurücksubstituiert und die Wurzel gezogen werden. Die Wurzel lässt sich nur für positive z-Werte lösen.

Beispiel:

$$\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$$

Substitution: $z=x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0\,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$p=-18\,;\,q=81$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$$

$$z=-\frac{p}{2}=9$$

Rücksubstitution

$$z=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3;3\}}}$$

In diesem Fall ist die Diskriminante Null, so dass es für die Substitutionsvariable nur einen Wert gibt (z = 9).
Das bedeutet, die Polynomgleichung 4. Grades hat nur zwei Lösungen.

Variante 4: In der Polynomgleichung kommt kein absolutes Glied vor.

$$ax^3+bx^2+cx=0\Leftrightarrow x\left(ax^2+bx+c\right)=0$$

$$x_1=0 \quad ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{2/3}$$

Die Variable x lässt sich ausklammern. Lösungen werden nach dem Satz vom Nullprodukt berechnet (Faktorisierungsverfahren).
Beispiel:

$$x^3+x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow p=1;\,q=-2$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{aligned}x_2&=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1\\ x_3&=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\,;0\,;1\}}}$$

Der zweite Faktor vom Nullprodukt ist eine quadratische Gleichung.

Variante 5: Die Polynomgleichung entspricht nicht einer der Varianten 1 bis 4.
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
In vielen Fällen lässt sich die Lösung durch die Polynomdivision finden.
Dazu muss aber eine Lösung bekannt sein.

Ist eine Lösung des Polynoms bekannt, dann kann der Grad des Polynoms durch Polynomdivision um eins verringert werden.
Wenn das auf eine quadratische Gleichung führt, ist es ein leichtes, die weiteren Lösungen zu finden.
Folgendes Beispiel, bei dem die Lösung x = 2 bekannt ist soll das Verfahren der Polynomdivision verdeutlichen.
Die Division erfolgt nach den bekannten Regeln der schriftlichen Division.

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\qquad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad\quad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}$$

Der Klammerausdruck (.........) hat nun die Form $x^2 + x - 3$

$\Rightarrow$ Ansatz für die weitere Rechnung:

$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x-2) = 0$

Es ist also die quadratische Gleichung $x^2 + x - 3 = 0$ zu lösen.
Das geschieht mit der $p-q-$Formel:

$$p = 1;\, q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2\,;\, x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\,;\, x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\, -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}}}$$

Falls sich keine Lösung, z,B. durch raten oder probieren finden lässt, müssen numerische Verfahren herangezogen werden.