Lösungen Stochastik vermischt II

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz 1 € betragen.

E2 Ergebnisse

a)

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b)

(1)	Höchstens 3 mal Wappen	$P(X \le 3) = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$
(2)	Weniger als 3 mal Wappen	$P(X < 3) = \frac{16}{32} = \underline{\underline{0{,}5}}$
(3)	Mindestens 1 mal Wappen	$P(X \ge 1) = \frac{31}{32} = \underline{\underline{0{,}96875}}$
(4)	Mehr als einmal Wappen	$P(X > 1) = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$

E3	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%.

E4	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%.

E5	Ergebnisse	
	a)	Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%.
	b)	Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%.

E6	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%.

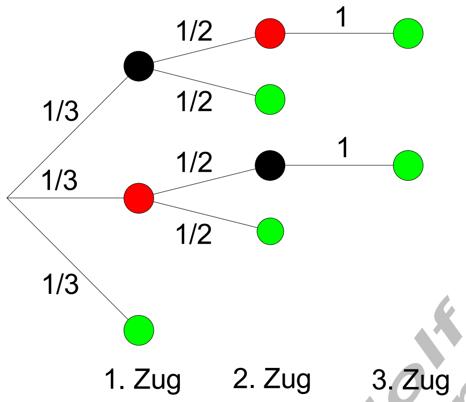
Die Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für Sigma- Umgebungen normalverteilter Zufallsvariablen befindet sich an Ende dieses Dokuments.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Eine Urne enthält eine rote, eine schwarze und eine grüne Kugel. Es wird solange ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen, bis eine grüne Kugel erscheint. Wird die grüne Kugel im 1. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 2€. Wird die grüne Kugel im 2. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 1€. Wird die grüne Kugel im 3. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 0€. Wie hoch muss der Einsatz sein, damit es sich um ein faires Spiel handelt?

A1 Ausführliche Lösung

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeiten dafür eine grüne Kugel zu ziehen.



Zug	Ergebnisse	P	Ausspielung X
1	(g)	$\frac{1}{3}$	2€
2	$(sg);(rg)$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	1€
3	$(srg);(rsg)$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	0€

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{1}}$$

Der Erwartungswert der Ausspielung ist E(X) = 1.
Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz 1 € betragen.

A2	**Aufgabe**			
	Eine Münze wird 5 mal geworfen und p sei 0,5.			
	a)	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X: Anzahl der Wappen.		
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man		
	(1)	Höchstens 3 mal Wappen?	(2)	Weniger als 3 mal Wappen?
	(3)	Mindestens 1 mal Wappen?	(4)	Mehr als einmal Wappen?

A2 Ausführliche Lösungen

a) Das Problem kann als 5 – stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden mit n = 5 und p = 0,5. Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}=0{,}03125$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}=0{,}15625$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}=0{,}3125$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}=0{,}3125$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}=0{,}15625$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}=0{,}03125$

A2 b)

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\le3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X<3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0{,}5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\ge1)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0{,}96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X>1)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$

A3	**Aufgabe**
	Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch mit n = 500 und p = 0,33. Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180]. Es soll mit einer Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma gerechnet werden.

A3 Ausführliche Lösung

$$\begin{matrix} n = 500 \\ p = 0{,}33 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}33 = 165 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{165 \cdot 0{,}67} = \sqrt{110{,}55} \approx 10{,}514 > 3 \end{matrix}$$

$\left[\{\ \ldots\ 150 \ldots 165 \ldots 180\ \ldots\}\right]$ Intervall ist symmetrisch zum Erwartungswert

$P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)^{*)}$

$\Rightarrow$ Radius um den Erwartungswert: $r = \mu - 149{,}5 = 165 - 149{,}5 = 15{,}5$

$$\frac{r}{\sigma} = z = \frac{15{,}5}{\sqrt{110{,}55}} \approx 1{,}474 \Rightarrow r = z \cdot \sigma \approx 1{,}474 \cdot \sigma$$

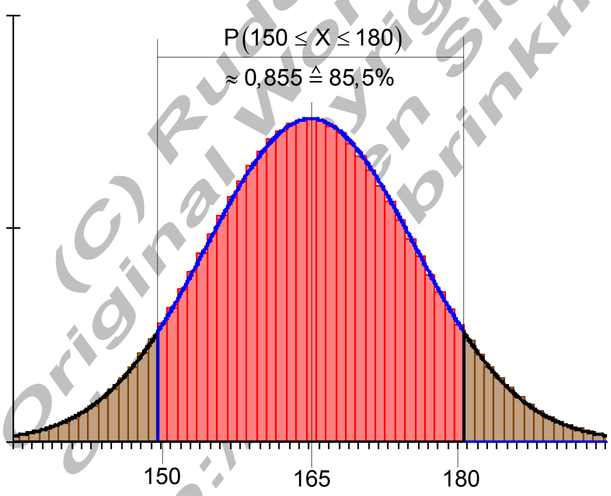
$P(150 \le X \le 180) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = P(\mu - 1{,}474 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}474 \cdot \sigma)$

$z = 1{,}474 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,858

$$\underline{\underline{P(150 \le X \le 180) \approx 0{,}858 \quad (85{,}8\%)}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%.

A3



A4	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die 90%- Umgebung vom Erwartungswert für n = 550 und p = 0,36.

A4 Ausführliche Lösung

$$\begin{matrix} n = 550 \\ p = 0{,}36 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 550 \cdot 0{,}36 = 198 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{198 \cdot 0{,}64} = \sqrt{126{,}72} \approx 11{,}257 > 3 \end{matrix}$$

$P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = 0{,}90$

Der dazugehörige z- Wert wird aus der Tabelle abgelesen für $P = 0{,}90$

$z = 1{,}64 \Rightarrow$ Umgebungsradius: $r = z \cdot \sigma \approx 1{,}64 \cdot \sqrt{126{,}72} \approx 18{,}46$

$\mu - z \cdot \sigma = 198 - 18{,}46 = 179{,}54 \approx 180$

$\mu + z \cdot \sigma = 198 + 18{,}46 = 216{,}46 \approx 216$

Das Intervall soll symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 198$ liegen.

Wir wählen: $P(180 \le X \le 216)$

Es ist zu prüfen, ob das Intervall $\{180 \ldots 198 \ldots 216\}$ der Forderung (90%) entspricht.

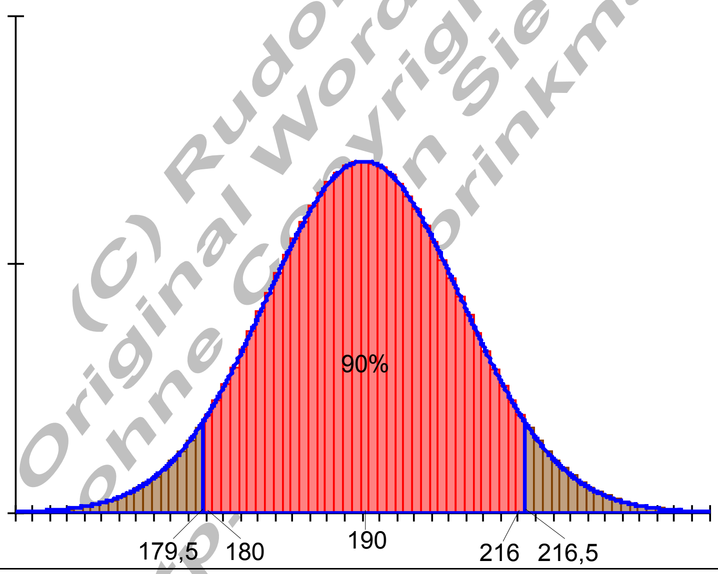
$P(180 \le X \le 216) = P(179{,}5 \le X \le 216{,}5)$

$r = 18{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{18{,}5}{11{,}257} \Rightarrow r \approx 1{,}64 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}64$

$P(180 \le X \le 216) \approx 0{,}899$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%.

A4



A5	**Aufgabe**	
	Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse außerhalb von Umgebungen um den Erwartungswert.	
	a)	$n = 300 \quad p = 0{,}56$ bestimmen Sie $P(X < 162)$
	b)	$n = 240 \quad p = 1/3$ bestimmen Sie $P(X > 80)$

A5 Ausführliche Lösung

a)

$$\begin{matrix} n = 300 \\ p = 0{,}56 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}56 = 168 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{168 \cdot 0{,}44} = \sqrt{73{,}92} \approx 8{,}598 > 3 \end{matrix}$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für das Intervall [0 ; 161].
Aus der Tabelle kann nur die Wahrscheinlichkeit für ein um den Erwartungswert
symmetrisches Intervall abgelesen werden, dieses enthält die Werte
[162 .... 168 ... 174]. Daran anschließend folgt das
Intervall [175 .... 300], welches aus Symmetriegründen die gleiche Größe wie
[0 ; 161] hat. Es gilt folgender Ansatz:
[{ 0 ... 161 } {162 ... 168 ... 174 } { 175 ... 300}]

$$P(X < 162) = P(X \le 161) = \frac{1}{2}\left[1 - P(161{,}5 \le X \le 174{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 168 - 161{,}5 = 6{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{6{,}5}{\sqrt{73{,}92}} \approx 0{,}756 \Rightarrow r \approx 0{,}756 \cdot \sigma$$

mit $z \approx 0{,}76$ wird

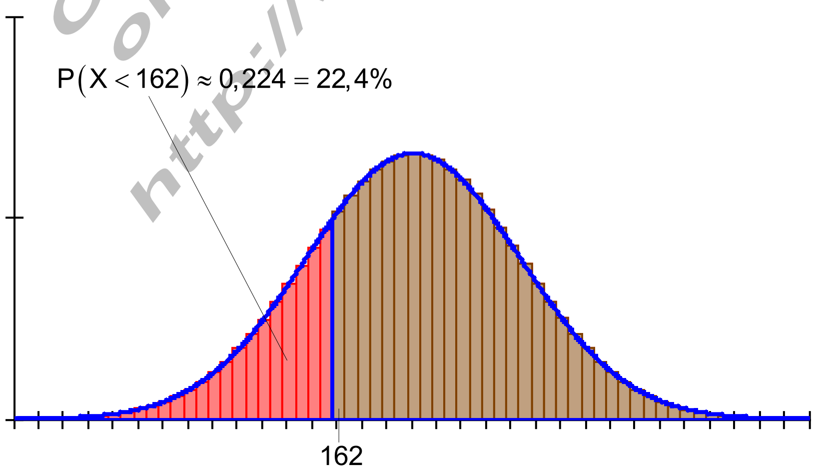
$$P(161{,}5 \le X \le 174{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}553$$

und damit wird

$$P(X < 162) \approx \frac{1}{2}[1 - 0{,}553] = \frac{1}{2} \cdot 0{,}447 = \underline{\underline{0{,}2235}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%.

A5 a)



A5 Ausführliche Lösung

b)

$$n = 240 \qquad \mu = n \cdot p = 240 \cdot \frac{1}{3} = 80$$

$$p = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} \approx 7{,}303 > 3$$

$$\left[\{\ 0\ \dots\ 79\ \}\{79{,}5\ \dots\ 80\ \dots\ 80{,}5\ \}{\color{red}\{\ 81\ \dots\ 240\ \}}\right]$$

$$P(X > 80) = \frac{1}{2}\left[1 - P(79{,}5 \le X \le 80{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 80 - 79{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{0{,}5}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \approx 0{,}068 \Rightarrow r \approx 0{,}07 \cdot \sigma$$

mit $z \approx 0{,}07$ wird

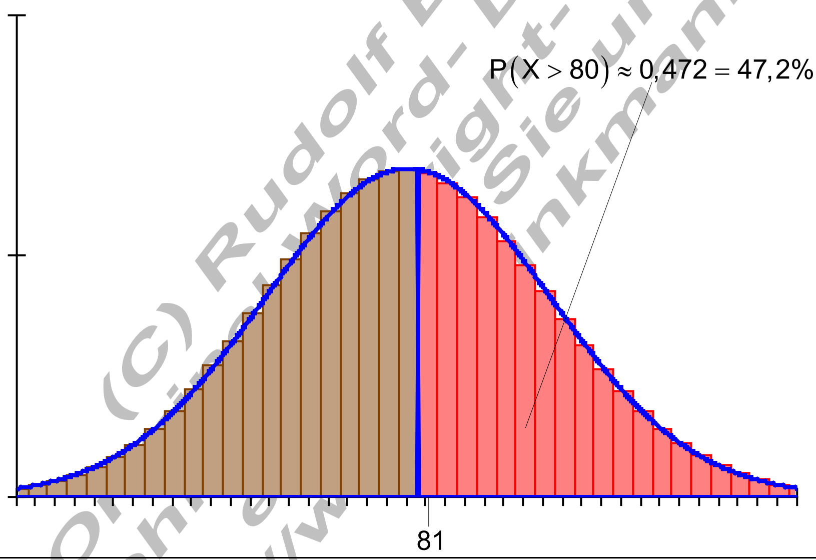
$$P(79{,}5 \le X \le 80{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}056$$

und damit wird

$$P(X > 80) \approx 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}056) = 0{,}5 \cdot 0{,}944 \approx \underline{\underline{0{,}472}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%.

A5 b)



A6	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer nicht symmetrischen Umgebung vom Erwartungswert. n = 180, p = 0,55, Intervall: [89 ... 104].

A6 Ausführliche Lösung

$$\begin{matrix} n = 180 \\ p = 0{,}55 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 180 \cdot 0{,}55 = 99 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{99 \cdot 0{,}45} = \sqrt{44{,}55} \approx 6{,}675 > 3 \end{matrix}$$

bestimmen Sie $P(89 \le X \le 104)$

$$\left[\{89...93\}\{94...99...104\}\{105...109\}\right]$$

Ansatz: $P(89 \le X \le 104) = P(89 \le X \le 93) + P(94 \le X \le 104)$

$$P(89 \le X \le 93) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) - P(94 \le X \le 104)\right]$$

$$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) - P(94 \le X \le 104)\right] + P(94 \le X \le 104)$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) + P(94 \le X \le 104)\right]$$

$$P(89 \le X \le 109) = P(88{,}5 \le X \le 109{,}5)$$

$$r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{10{,}5}{6{,}675} \approx 1{,}57 \Rightarrow r \approx 1{,}57 \cdot \sigma$$

$$P(89 \le X \le 109) \approx 0{,}884$$

$$P(94 \le X \le 104) = P(93{,}5 \le X \le 104{,}5)$$

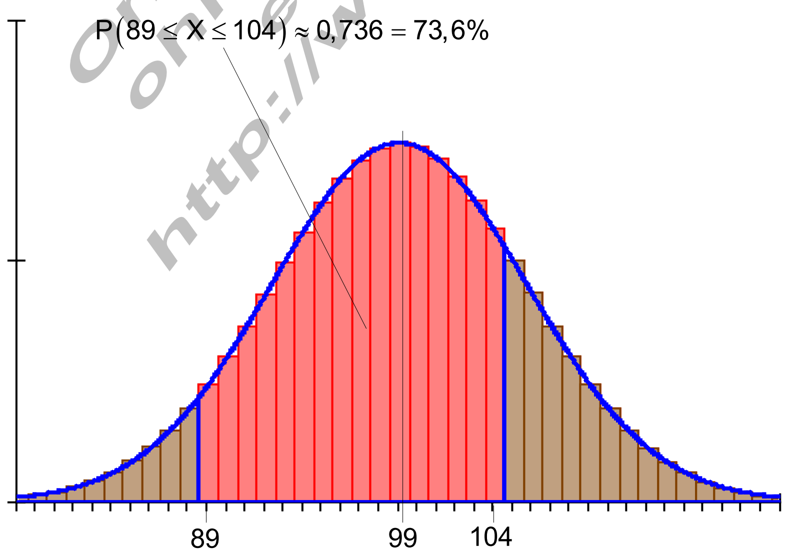
$$r = 5{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{5{,}5}{6{,}675} \approx 0{,}82 \Rightarrow r \approx 0{,}82 \cdot \sigma$$

$$P(94 \le X \le 104) \approx 0{,}588$$

$$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}[0{,}884 + 0{,}588] = 0{,}736$$

Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%.

A6



Wahrscheinlichkeiten für σ – Umgebungen normalverteilter Zufallsvariablen
$P = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma)$ falls $\sigma > 3$ Laplace- Bedingung

z	P	z	P	z	P	z	P	z	P	z	P
0,01	0,008	0,51	0,390	1,01	0,688	1,51	0,869	2,01	0,956	2,51	0,988
0,02	0,016	0,52	0,397	1,02	0,692	1,52	0,871	2,02	0,957	2,52	0,988
0,03	0,024	0,53	0,404	1,03	0,697	1,53	0,874	2,03	0,958	2,53	0,989
0,04	0,032	0,54	0,411	1,04	0,702	1,54	0,876	2,04	0,959	2,54	0,989
0,05	0,040	0,55	0,418	1,05	0,706	1,55	0,879	2,05	0,960	2,55	0,989
0,06	0,048	0,56	0,425	1,06	0,711	1,56	0,881	2,06	0,961	2,56	0,990
0,07	0,056	0,57	0,431	1,07	0,715	1,57	0,884	2,07	0,962	2,57	0,990
0,08	0,064	0,58	0,438	1,08	0,720	1,58	0,886	2,08	0,962	2,58	0,990
0,09	0,072	0,59	0,445	1,09	0,724	1,59	0,888	2,09	0,963	2,59	0,990
0,10	0,080	0,60	0,451	1,10	0,729	1,60	0,890	2,10	0,964	2,60	0,991
0,11	0,088	0,61	0,458	1,11	0,733	1,61	0,893	2,11	0,965	2,61	0,991
0,12	0,096	0,62	0,465	1,12	0,737	1,62	0,895	2,12	0,966	2,62	0,991
0,13	0,103	0,63	0,471	1,13	0,742	1,63	0,897	2,13	0,967	2,63	0,991
0,14	0,111	0,64	0,478	1,14	0,746	1,64	0,899	2,14	0,968	2,64	0,992
0,15	0,119	0,65	0,484	1,15	0,750	1,65	0,901	2,15	0,968	2,65	0,992
0,16	0,127	0,66	0,491	1,16	0,754	1,66	0,903	2,16	0,969	2,66	0,992
0,17	0,135	0,67	0,497	1,17	0,758	1,67	0,905	2,17	0,970	2,67	0,992
0,18	0,143	0,68	0,503	1,18	0,762	1,68	0,907	2,18	0,971	2,68	0,993
0,19	0,151	0,69	0,510	1,19	0,766	1,69	0,909	2,19	0,971	2,69	0,993
0,20	0,159	0,70	0,516	1,20	0,770	1,70	0,911	2,20	0,972	2,70	0,993
0,21	0,166	0,71	0,522	1,21	0,774	1,71	0,913	2,21	0,973	2,71	0,993
0,22	0,174	0,72	0,528	1,22	0,778	1,72	0,915	2,22	0,974	2,72	0,993
0,23	0,182	0,73	0,535	1,23	0,781	1,73	0,916	2,23	0,974	2,73	0,994
0,24	0,190	0,74	0,541	1,24	0,785	1,74	0,918	2,24	0,975	2,74	0,994
0,25	0,197	0,75	0,547	1,25	0,789	1,75	0,920	2,25	0,976	2,75	0,994
0,26	0,205	0,76	0,553	1,26	0,792	1,76	0,922	2,26	0,976	2,76	0,994
0,27	0,213	0,77	0,559	1,27	0,796	1,77	0,923	2,27	0,977	2,77	0,994
0,28	0,221	0,78	0,565	1,28	0,799	1,78	0,925	2,28	0,977	2,78	0,995
0,29	0,228	0,79	0,570	1,29	0,803	1,79	0,927	2,29	0,978	2,79	0,995
0,30	0,236	0,80	0,576	1,30	0,806	1,80	0,928	2,30	0,979	2,80	0,995
0,31	0,243	0,81	0,582	1,31	0,810	1,81	0,930	2,31	0,979	2,81	0,995
0,32	0,251	0,82	0,588	1,32	0,813	1,82	0,931	2,32	0,980	2,82	0,995
0,33	0,259	0,83	0,593	1,33	0,816	1,83	0,933	2,33	0,980	2,83	0,995
0,34	0,266	0,84	0,599	1,34	0,820	1,84	0,934	2,34	0,981	2,84	0,995
0,35	0,274	0,85	0,605	1,35	0,823	1,85	0,936	2,35	0,981	2,85	0,996
0,36	0,281	0,86	0,610	1,36	0,826	1,86	0,937	2,36	0,982	2,86	0,996
0,37	0,289	0,87	0,616	1,37	0,829	1,87	0,939	2,37	0,982	2,87	0,996
0,38	0,296	0,88	0,621	1,38	0,832	1,88	0,940	2,38	0,983	2,88	0,996
0,39	0,303	0,89	0,627	1,39	0,835	1,89	0,941	2,39	0,983	2,89	0,996
0,40	0,311	0,90	0,632	1,40	0,838	1,90	0,943	2,40	0,984	2,90	0,996
0,41	0,318	0,91	0,637	1,41	0,841	1,91	0,944	2,41	0,984	2,91	0,996
0,42	0,326	0,92	0,642	1,42	0,844	1,92	0,945	2,42	0,984	2,92	0,996
0,43	0,333	0,93	0,648	1,43	0,847	1,93	0,946	2,43	0,985	2,93	0,997
0,44	0,340	0,94	0,653	1,44	0,850	1,94	0,948	2,44	0,985	2,94	0,997
0,45	0,347	0,95	0,658	1,45	0,853	1,95	0,949	2,45	0,986	2,95	0,997
0,46	0,354	0,96	0,663	1,46	0,856	1,96	0,950	2,46	0,986	2,96	0,997
0,47	0,362	0,97	0,668	1,47	0,858	1,97	0,951	2,47	0,986	2,97	0,997
0,48	0,369	0,98	0,673	1,48	0,861	1,98	0,952	2,48	0,987	2,98	0,997
0,49	0,376	0,99	0,678	1,49	0,864	1,99	0,953	2,49	0,987	2,99	0,997
0,50	0,383	1,00	0,683	1,50	0,866	2,00	0,954	2,50	0,988	3,00	0,997