Oberstufe: Ergebnisse und ausführliche Lösungen zu Harmonische Schwingungen I

Ergebnisse:

E1	Die Pendeluhr	
	a)	Was muss man tun, wenn eine Pendeluhr zu schnell geht?
	b)	Ändert sich ihr Zeittakt, wenn die Amplituden des Pendels immer kleiner werden?
	c)	Wie muss man verfahren, damit das Pendel mit halber Frequenz schwingt?
	Ergebnisse	
	a)	Man muss die Pendellänge vergrößern.
	b)	Die Verringerung der Amplituden haben keinen Einfluss auf die Periodendauer und damit auf den Zeittakt.
	c)	Die halbe Frequenz wird bei einer vierfachen Pendellänge erreicht.

E2	Ein Fadenpendel schwingt mit der Periodendauer T_1 = 1,91 s. Wenn man den Faden um 130 cm verlängert, erhöht sich die Periodendauer auf 2,98 s. Berechnen Sie aus diesen genau messbaren Angaben die Fallbeschleunigung für den Ort, an dem das Pendel schwingt.
	Ergebnis
	Die Fallbeschleunigung am Messort beträgt etwa 9,809 m/s^2.

E3	Der Kammerton A' hat die Frequenz f = 440 Hz. Heute stimmt man Instrumente häufig mit der Frequenz 443 Hz. Berechnen Sie jeweils die Periodendauer und vergleichen Sie.
	Ergebnis
	Die Periodendauer wird mit steigender Frequenz geringer.

E4	Hängt man einen Körper der Masse m = 600 g an eine Schraubenfeder, so wird sie um 12 cm verlängert. Mit welcher Frequenz schwingt dieses Federpendel?
	Ergebnis
	Das Federpendel schwingt mit einer Frequenz von etwa 1,439 Hz.

E5	Ein Fadenpendel braucht für 8 Perioden 10 Sekunden.	
	a)	Wie groß ist die Periodendauer T?
	b)	Wie groß ist die Zahl der Perioden in 1 s?
	c)	Welche Frequenz hat das Pendel?
	Ergebnisse	
	a)	Die Periodendauer beträgt 1,25 Sekunden.
	b)	Die Zahl der Perioden pro Sekunde beträgt 0,8/s
	c)	Das Pendel schwingt mit einer Frequenz von 0,8 Hz.

E6	Wie lang muss ein Fadenpendel sein, dass an der Erdoberfläche (g = 9,81 m/s^2) bei kleiner Amplitude mit der Periodendauer T = 1 s schwingt?
	Ergebnis
	Die Pendellänge beträgt etwa 0,248 m.

E7	Man möchte ein Fadenpendel herstellen, das in einer Sekunde genau eine Halbschwingung ausführt (Sekundenpendel). Welche Länge müsste das Pendel	
	a)	am Äquator ($g = 9{,}78\ m/s^2$)
	b)	am Pol ($g = 9{,}83\ m/s^2$) haben?
	Ergebnisse	
	a)	Am Äquator ist die Länge des Sekundenpendels etwa 0,991 m.
	b)	Am Pol ist die Länge des Sekundenpendels etwa 0,996 m.

E8	Zum Nachweis der Erdrotation verwendete L. Foucault (1851) ein 67 m langes Pendel. Berechnen Sie die Periodendauer.
	Ergebnis
	Die Periodendauer des Pendels beträgt etwa 16,42 s.

E9	Woran könnte es liegen, wenn eine Pendeluhr im Winter etwas schneller geht als im Sommer?
	Ergebnis
	Der Temperatureinfluss verkürzt die Pendellänge.

E10	Ein Fadenpendel mit einer bestimmten Frequenz wird auf den Mond gebracht. Ist dort seine Frequenz größer, gleich oder kleiner als auf der Erde? Begründen Sie.
	Ergebnis
	Auf dem Mond schwingt das Pendel langsamer, da dort eine geringere Gravitationskonstante herrscht.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Die Pendeluhr	
	a)	Was muss man tun, wenn eine Pendeluhr zu schnell geht?
	b)	Ändert sich ihr Zeittakt, wenn die Amplituden des Pendels immer kleiner werden?
	c)	Wie muss man verfahren, damit das Pendel mit halber Frequenz schwingt?

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Wenn die Pendeluhr zu schnell geht, muss man die Pendellänge vergrößern. Das lässt sich in den meisten Fällen durch eine Einstellschraube am unteren Ende des Pendels erreichen. Dadurch wird die Periodendauer der Schwingung vergrößert. Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad l = \text{Pendellänge} \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$
	b)	Die Verringerung der Amplituden haben keinen Einfluss auf die Periodendauer und damit auf den Zeittakt. Die Periodendauer der harmonischen Schwingung ist nur von der Pendellänge l und der Gravitationskonstante g abhängig.
	c)	Für die Frequenz der harmonischen Schwingung gilt: Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad l = \text{Pendellänge} \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ Frequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ Halbe Frequenz: $\frac{1}{2} f = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ $= \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{g}{l}} = \underline{\underline{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{4 \cdot l}}}}$ Die halbe Frequenz wird bei einer vierfachen Pendellänge erreicht.

A2	**Aufgabe**
	Ein Fadenpendel schwingt mit der Periodendauer $T_1 = 1{,}91$ s. Wenn man den Faden um 130 cm verlängert, erhöht sich die Periodendauer auf 2,98 s. Berechnen Sie aus diesen genau messbaren Angaben die Fallbeschleunigung für den Ort, an dem das Pendel schwingt.

A2 Ausführliche Lösung

geg. $T_1 = 1{,}91\,\text{s} \quad l_1 = l \quad T_2 = 2{,}98\,\text{s} \quad l_2 = l + \Delta l \quad \Delta l = 1{,}3\,\text{m}$ ges. g

Ansatz: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow T_1^2 = (2\pi)^2 \frac{l}{g}$

$$\Leftrightarrow l = \frac{T_1^2}{(2\pi)^2} \cdot g \Leftrightarrow l = g \cdot \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l+\Delta l}{g}} \Leftrightarrow T_2^2 = (2\pi)^2 \frac{l+\Delta l}{g}$$

$$\Leftrightarrow l + \Delta l = \frac{T_2^2}{(2\pi)^2} \cdot g \Rightarrow l = g \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \Delta l$$

Elemination von l durch gleichsetzen:

$$\Rightarrow g \cdot \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = g \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \Delta l$$

nach g auflösen:

$$\Delta l = g \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - g \cdot \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow g\left[\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2\right] = \Delta l$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{\Delta l}{\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot \Delta l}{T_2^2 - T_1^2}$$

$$= \frac{(2\pi)^2 \cdot 1{,}3\,\text{m}}{(2{,}98\,\text{s})^2 - (1{,}91\,\text{s})^2} \approx \underline{\underline{9{,}809\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Die Fallbeschleunigung am Messort beträgt etwa 9,809 m/s^2.

A3	**Aufgabe**
	Der Kammerton A’ hat die Frequenz f = 440 Hz. Heute stimmt man Instrumente häufig mit der Frequenz 443 Hz. Berechnen Sie jeweils die Periodendauer und vergleichen Sie.

A3 **Ausführliche Lösung**

$$f_1 = 440\text{Hz} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{440\frac{1}{s}} = \underline{\underline{0{,}002273\text{s}}}$$

$$f_2 = 443\text{Hz} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{443\frac{1}{s}} = \underline{\underline{0{,}002257\text{s}}}$$

Die Periodendauer wird mit steigender Frequenz geringer.

A4	**Aufgabe**
	Hängt man einen Körper der Masse m = 600 g an eine Schraubenfeder, so wird sie um 12 cm verlängert. Mit welcher Frequenz schwingt dieses Federpendel?

A4 **Ausführliche Lösung**

$$\text{geg. } m = 600\text{ g} = 0{,}6\text{ kg} \quad s = 12\text{ cm} = 0{,}12\text{ m} \quad g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \text{ges. Frequenz f}$$

$$\text{Federpendel:} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \;\text{ mit }\; D = \frac{m\cdot g}{s}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m\cdot g}{s}}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m\cdot s}{m\cdot g}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{s}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}12\text{ m}}} \approx \underline{\underline{1{,}439\frac{1}{\text{s}}}}$$

Das Federpendel schwingt mit einer Frequenz von etwa 1,439 Hz.

A5	**Aufgabe**
	Ein Fadenpendel braucht für 8 Perioden 10 Sekunden.
	a) Wie groß ist die Periodendauer T?
	b) Wie groß ist die Zahl der Perioden in 1 s?
	c) Welche Frequenz hat das Pendel?

A5	**Ausführliche Lösung**
a)	Periodendauer: $T = \frac{\text{gemessene Zeit}}{\text{Anzahl der Perioden}} = \frac{10s}{8} = \frac{5}{4}s = \underline{\underline{1,25\,s}}$ Die Periodendauer beträgt 1,25 Sekunden.
b)	Zahl der Perioden pro Sekunde: $\frac{\text{Anzahl der Perioden}}{\text{gemessene Zeit}} = \frac{8}{10s} = \underline{\underline{\frac{0,8}{s}}}$ Die Zahl der Perioden pro Sekunde beträgt 0,8/s.
c)	Frequenz: $f = \frac{n}{t} = \frac{8}{10s} = \underline{\underline{\frac{0,8}{s}}} = \underline{\underline{0,8Hz}}$ Das Pendel schwingt mit einer Frequenz von 0,8 Hz.

A6	**Aufgabe**
	Wie lang muss ein Fadenpendel sein, dass an der Erdoberfläche (g = 9,81 m/s^2) bei kleiner Amplitude mit der Periodendauer T = 1 s schwingt?

A6	**Ausführliche Lösung**
	geg. $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ $T = 1s$ ges. Pendellänge l $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g} \Leftrightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow l = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ $l = 9,81\frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{1\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0,248\,m}}$ Die Pendellänge beträgt etwa 0,248 m.

A7	**Aufgaben**
	Man möchte ein Fadenpendel herstellen, das in einer Sekunde genau eine Halbschwingung ausführt (Sekundenpendel). Welche Länge müsste das Pendel
	a) am Äquator (g = 9,78 m/s^2)
	b) am Pol (g = 9,83 m/s^2) haben?

A7 Ausführliche Lösung

Wenn die Zeit für eine Halbschwingung 1 Sekunde betragen soll, dann beträgt die Periodendauer des Pendels T = 2 s.

a)

gegeben: Äquator $g_{Ä} = 9{,}78\,\frac{m}{s^2}$ $\quad T = 2\,s \quad$ gesucht: Pendellänge l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g} \Leftrightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow l = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9{,}78\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{2\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0{,}991\,m}}$$

Am Äquator ist die Länge des Sekundenpendels etwa 0,991 m.

b)

gegeben: Pol $g_P = 9{,}83\,\frac{m}{s^2}$ $\quad T = 2\,s \quad$ gesucht: Pendellänge l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g} \Leftrightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow l = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9{,}83\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{2\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0{,}996\,m}}$$

Am Pol ist die Länge des Sekundenpendels etwa 0,996 m.

A8	**Aufgabe**
	Zum Nachweis der Erdrotation verwendete L. Foucault (1851) ein 67 m langes Pendel. Berechnen Sie die Periodendauer.

A8 Ausführliche Lösung

geg. Pendellänge 67 m $\quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \quad$ ges. T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{67\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} \approx \underline{\underline{16{,}42\,s}}$$

Die Periodendauer des Pendels beträgt etwa 16,42 s.

A9	**Aufgabe**
	Woran könnte es liegen, wenn eine Pendeluhr im Winter etwas schneller geht als im Sommer?

A9	**Ausführliche Lösung**
	Im Winter, wenn es kälter ist, zieht sich das Pendel etwas zusammen (Wärmeausdehnung), ist also kürzer. Bei kürzerer Pendellänge wird die Periodendauer geringer und damit die Frequenz größer. Die Uhr geht etwas schneller. Mit einer Stellschraube am unteren Ende des Pendels kann die Periodendauer geringfügig verlängert werden, so dass die Uhr wieder richtig geht.

A10	**Aufgabe**
	Ein Fadenpendel mit einer bestimmten Frequenz wird auf den Mond gebracht. Ist dort seine Frequenz größer, gleich oder kleiner als auf der Erde? Begründen Sie.

A10	**Ausführliche Lösung**
	Für die Periodendauer gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ für die Frequenz gilt: $f = \frac{1}{T}$ Auf dem Mond ist die Gravitationskonstante g geringer als auf der Erde. Das bedeutet, die Periodendauer des Pendels ist dort größer. Die Frequenz, mit der das Pendel schwingt, ist geringer als auf der Erde. Das Pendel schwingt auf dem Mond langsamer als auf der Erde.