FOS: Lösungen Vermischte Aufgaben zur Mechanik

1. Die Skala eines Kraftmessers ist unkenntlich geworden.
   Nur die Marken für 0 N und 5 N sind erhalten geblieben.
   Wie können Sie die Einteilung wiederherstellen?

Zu 1. Die Dehnung eines Kraftmessers ist nach dem Hookeschen Gesetz proportional zu der an ihm wirkenden Kraft. Die Skala kann repariert werden, indem man den Bereich zwischen 0 N und 5 N durch Markierungsstriche in 5 gleiche Teile aufteilt und die Striche von 1 bis 4 beziffert.

2. Vergleichen Sie die Leistung zweier Seilwinden.
   Seilwinde A hebt in 3 s eine Last von 1000 N 15 m hoch.
   Seilwinde B hebt eine Last von 5000 N in 2 s auf 1,6 m Höhe.

Zu 2.

Seilwinde A: $t = 3\,s \quad G = 1000\,N \quad h = 15\,m$

Seilwinde B: $t = 2\,s \quad G = 5000\,N \quad h = 1{,}6\,m$

$$A:\ P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{1000\,N \cdot 15\,m}{3\,s} = \frac{15000\,Nm}{3\,s} = \frac{15000\,Ws}{3\,s} = \underline{\underline{5000\,W}}$$

$$B:\ P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{5000\,N \cdot 1{,}6\,m}{2\,s} = \frac{8000\,Nm}{2\,s} = \frac{8000\,Ws}{2\,s} = \underline{\underline{4000\,W}}$$

Seilwinde A hat eine Leistung von $\underline{\underline{5000\ W}}$, Seilwinde B von $\underline{\underline{4000\ W}}$

3. Ein Auto wiegt 93 kN. Es hat einen Motor, der 45 kW leistet.
   In welcher Zeit müsste das Auto auf einen 1500 m hohen Berg hinauffahren können?

Zu 3.

$G = 93\,kN = 93000\,N \quad P = 45\,kW = 45000\,W \quad h = 1500\,m$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} \Rightarrow t = \frac{G \cdot h}{P} \qquad 1\,Nm = 1\,Ws$$

$$t = \frac{93000\,N \cdot 1500\,m}{45000\,W} = \frac{93000 \cdot 1500\,Ws}{45000\,W} = 3100\,s = \underline{\underline{51\frac{2}{3}\,min}}$$

Das Auto könnte in $\underline{\underline{51\frac{2}{3}}}$ min den Berg hinauffahren.

4. Eine entspannte Feder wird durch 20 N um 10 cm verlängert (gespannt).
   Welche Spannenergie besitzt sie?

Zu 4.

$F = 20\,N \quad s = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$$W_{Sp} = \frac{1}{2} D \cdot s^2 \quad F = D \cdot s \Rightarrow D = \frac{F}{s} \Rightarrow W_{Sp} = \frac{1}{2}\frac{F}{s} \cdot s^2 = \frac{1}{2} F \cdot s$$

$$W_{Sp} = \frac{1}{2} \cdot 20\,N \cdot 0{,}1\,m = 10 \cdot 0{,}1\,Nm = \underline{\underline{1\,Nm}}$$

Die Feder besitzt eine Spannenergie von $\underline{\underline{W_{Sp} = 1\,Nm}}$

5. Man muss einen Kraftmesser um s = 0,05 m verlängern, bis er die Marke 5 N anzeigt.
   Wie groß ist seine Federhärte?

Zu 5.

$s = 0{,}05\,m \quad F = 5\,N$

$$D = \frac{F}{s} = \frac{0{,}5\,N}{0{,}05\,m} = \underline{\underline{100\frac{N}{m}}}$$

Die Federhärte (Federkonstante) beträgt $\underline{\underline{D = 100\frac{N}{m}}}$

6. Hängt man einen Körper der Masse 0,4 kg an eine Schraubenfeder, so wird sie um10 cm verlängert.
   Nun wird das System in Schwingung versetzt.
   Mit welcher Frequenz schwingt das System?

Zu 6.

$m = 0{,}4\,kg \quad s = 10\,cm = 0{,}1\,m$

Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ Frequenz: $f = \frac{1}{T}$

Zuerst wird die Federhärte D berechnet.

$$F = D \cdot s \Rightarrow D = \frac{F}{s} = \frac{0{,}4\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}1\,m} = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}81}{0{,}1}\frac{kg}{s^2} = \underline{\underline{39{,}24\frac{N}{m}}}$$

Bemerkung: $1\frac{N}{m} = 1\frac{kg}{s^2}$

$$\text{Schwingungsdauer: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4\,kg}{39{,}24\frac{kg}{s^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4}{39{,}24}}\,s \approx 0{,}634\,s$$

$$\text{Frequenz: } f = \frac{1}{T} \approx \frac{1{,}576}{s} = \underline{\underline{1{,}576\,Hz}}$$

Das System schwingt mit einer Frequenz von $\underline{\underline{f \approx 1{,}576\,Hz}}$

7. Wo geht eine Pendeluhr schneller, am Äquator oder am Nordpol?

Zu 7.

Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Bekanntlich ist die Erdbeschleunigung wegen der am Äquator auftretenden Fliehkraft dort etwas geringer als am Nordpol. Bei genauer Betrachtung obiger Gleichung lässt sich feststellen, das bei größeren g – Werten die Schwingungsdauer geringer wird. Für die Pendeluhr bedeutet eine geringere Schwingungsdauer, dass sie schneller geht. Fazit: Am Nordpol geht die Pendeluhr etwas schneller als am Äquator.

8. Welche Länge hat ein Fadenpendel, das mit gleicher Frequenz wie ein Federpendel der Masse m = 2 kg und mit der Federkonstanten D = 100 N/m schwingt?

$m = 2\,\text{kg} \quad D = 100\frac{N}{m} = 100\frac{kg}{s^2} \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$

Das Fadenpendel und das Federpendel haben die gleiche Frequenz.

Das bedeutet. $f_1 = f_2 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2$

Fadenpendel: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ Federpendel: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Leftrightarrow \frac{L}{g} = \frac{m}{D} \Rightarrow L = g\cdot\frac{m}{D}$$

$$L = 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot\frac{2\,kg}{100\frac{kg}{s^2}} = \frac{9{,}81\cdot 2}{100}m = \underline{\underline{0{,}1962\,m}}$$

Das Fadenpendel hat eine Länge von $\underline{\underline{L = 0{,}1962\,m}}$

9. Ein Auto hat die Masse von 1200 kg.
Wenn 4 Personen (je 75 kg) einsteigen, senkt sich die Karosserie um 5 cm.
a) Wie groß ist die Federkonstante?
b) Mit welcher Frequenz schwingt der vollbeladene Wagen auf und ab, wenn er defekte Stoßdämpfer hat?

Zu 9.

Masse des Autos: $m_A = 1200\,kg$ Masse der Personen: $m_P = 4\cdot 75\,kg = 300\,kg$

Gesamte Masse die in Schwingung geraten kann: $m = m_A + m_P = 1500\,kg$

Federweg zur Berechnung der Federkonstanten: $s = 5\,cm = 0{,}05\,m$

a) Berechnung der Federkonstanten:

$$D = \frac{m_p\cdot g}{s} = \frac{300\,kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}05\,m} = 58860\frac{kg}{s^2} = \underline{\underline{58860\frac{N}{m}}}$$

Die Federkonstante des Autos beträgt $\underline{\underline{D = 58860\frac{N}{m}}}$

b) Berechnung der Schwingungsfrequenz bei defekten Stoßdämpfern:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ mit $m = 1500\,kg$ und $D = 58860\frac{kg}{s^2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1500\,kg}{58860\frac{kg}{s^2}}} \approx 1{,}003\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} \approx \frac{0{,}997}{s} \approx \underline{\underline{1\,Hz}}$$

Bei defekten Stoßdämpfern schwingt der Wagen mit einer Frequenz von $\underline{\underline{f = 1\,Hz}}$

10. Wie weit vermag ein Pferd (P = 500 W) einen Wagen in einer Stunde mit der Kraft 200 N ziehen?

Zu 10.

$P = 500\,W \quad t = 1h = 3600\,s \quad F = 200\,N$

$W = F \cdot s \quad W = P \cdot t$

$$s = \frac{W}{F} = \frac{P \cdot t}{F} = \frac{500\,W \cdot 3600\,s}{200\,N} = 9000\frac{Ws}{N} = 9000\frac{Nm}{N} = \underline{\underline{9000\,m}}$$

In einer Stunde zieht das Pferd den Wagen $\underline{\underline{9000\text{ m}}}$

11. Welche Kraft entwickelt ein Auto, das bei Vollgas eine Leistung von 50 kW hat, wenn es
 a) im 1. Gang mit der konstanten Geschwindigkeit v = 5 m/s steil bergauf fährt?
 b) Wie groß ist die Kraft im 4. Gang bei gleicher Leistung des Motors wenn das Auto nun eine konstante Geschwindigkeit von v = 108 km/h hat?

Zu 11.

$P = 50\,kW = 50000\,W \quad v_1 = 5\frac{m}{s} \quad v_2 = 108\frac{km}{h} = 30\frac{m}{s}$

$P = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v}$

a) 1. Gang: $F = \frac{P}{v_1} = \frac{50000\,W}{5\frac{m}{s}} = 10000\frac{Ws}{m} = 10000\frac{Nm}{m} = \underline{\underline{10000\,N}}$

b) 4. Gang: $F = \frac{P}{v_2} = \frac{50000\,W}{30\frac{m}{s}} = \underline{\underline{1666\frac{2}{3}N}}$

Im 1. Gang entwickelt das Auto eine Antriebskraft von $\underline{\underline{F = 10000\,N}}$

Im 4. Gang entwickelt das Auto eine Antriebskraft von $\underline{\underline{F = 1666\frac{2}{3}N}}$

12 Ein Kran hat einen Elektromotor mit der Leistung P = 20 kW.
 Mit welcher Geschwindigkeit kann er ein Werkstück mit der Masse m = 0,5 t hochziehen?

Zu 12.

$P = 20\,kW = 20000\,W \quad m = 0{,}5\,t = 500\,kg$

$P = F \cdot v \Rightarrow v = \frac{P}{F}$ mit $F = m \cdot g$ folgt:

$$v = \frac{P}{m \cdot g} = \frac{20000\,W}{500\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = \frac{20000}{500 \cdot 9{,}81}\frac{\frac{Nm}{s}}{N} \approx \underline{\underline{4{,}08\frac{m}{s}}}$$

Der Kran kann das Werkstück mit einer Geschwindigkeit von $\underline{\underline{v \approx 4{,}08\frac{m}{s}}}$ hochziehen.

13. Wie lange braucht ein 500 W Motor, um 10 m^3 Wasser 29 m hoch zu pumpen?

Zu 13.

$P = 500\,W \quad h = 29\,m \quad 10\,m^3 \text{ Wasser } \Rightarrow m = 10000\,kg$

$W = m \cdot g \cdot h \quad P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow t = \frac{m \cdot g \cdot h}{P}$

$$t = \frac{10000\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 29\,m}{500\,W} = \frac{10000 \cdot 9{,}81 \cdot 29}{500} \frac{Ws}{W} = \underline{\underline{5689{,}8\,s \approx 1{,}6\,h}}$$

Der Motor benötigt etwa $\underline{\underline{1{,}6\text{ h}}}$ um 10 m^3 Wasser 29 m hochzupumpen.

14. Ein Sportwagen der Masse m = 800 kg soll in 10 s auf eine Endgeschwindigkeit von 180 km/h beschleunigen.
Welche Motorleistung ist dafür erforderlich, wenn man von Reibungskräften und den Zeiten für das Hochschalten der Gänge absieht?
Hinweis: Berechnen Sie 1. die Beschleunigung, 2. den Beschleunigungsweg, 3. die dazu benötigte Kraft, 4. die verrichtete Beschleunigungsarbeit, 5. die Leistung

Zu 14.

$m = 800\,kg \quad t = 10\,s \quad v = 180\frac{km}{h} = 50\frac{m}{s}$

Beschleunigung: $v = a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{50\frac{m}{s}}{10\,s} = \underline{\underline{5\frac{m}{s^2}}}$

Beschleunigungsweg: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 2{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 100\,s^2 = \underline{\underline{250\,m}}$

Beschleunigungskraft: $F = m \cdot a = 800\,kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = \underline{\underline{4000\,N}}$

Beschleunigungsarbeit: $W = F \cdot s = 4000\,N \cdot 250\,m = \underline{\underline{1000000\,Nm}}$

Motorleistung: $P = \frac{W}{t} = \frac{1000000\,Ws}{10\,s} = 100000\,W = \underline{\underline{100\,kW}}$

Die zur Beschleunigung erforderliche Motorleistung beträgt $\underline{\underline{100\text{ kW}}}$

Bemerkung: Die tatsächliche Motorleistung muss noch größer sein, da beim Beschleunigungsvorgang Reibungskräfte auftreten (Luftreibung).