FOS: Lösungen Aufgaben zur harmonischen Schwingung

Lösungen

1. Ein Fadenpendel braucht für 9 Perioden 12 Sekunden.
   a) Wie groß ist die Periodendauer T ?
   b) Wie groß ist die Zahl der Perioden in 1 s ?
   c) Welche Frequenz hat das Pendel ?

Lösung:

a) Periodendauer: $T = \frac{\text{gemessene Zeit}}{\text{Anzahl der Perioden}} = \frac{12\text{s}}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\text{s}}}$

b) Zahl der Perioden pro Sekunde: $\frac{\text{Anzahl der Perioden}}{\text{gemessene Zeit}} = \frac{9}{12\text{s}} = \underline{\underline{\frac{0{,}75}{\text{s}}}}$

c) Frequenz: $f = \frac{n}{t} = \frac{9}{12\text{s}} = \underline{\underline{\frac{0{,}75}{\text{s}}}} = \underline{\underline{0{,}75\text{Hz}}}$

2. Der Kammerton a' hat die Frequenz f = 440 Hz. Heute stimmt man Instrumente häufig mit der Frequenz 443 Hz.
   Berechnen Sie jeweils die Periodendauer und vergleichen Sie.

Lösung:

$$f_1 = 440\text{Hz} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{440\frac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{0{,}002273\text{s}}}$$

$$f_2 = 443\text{Hz} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{443\frac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{0{,}002257\text{s}}}$$

Die Periodendauer wird mit steigender Frequenz geringer.

3. a) Was muss man tun, wenn eine Pendeluhr zu schnell geht?
   b) Ändert sich ihr Zeittakt, wenn die Amplituden des Pendels immer kleiner werden?
   c) Wie muss man verfahren, damit das Pendel mit doppelter Frequenz schwingt?

Lösung:
a) Man muss die Pendellänge vergrößern.
b) Die Amplituden haben keinen Einfluss auf die Periodendauer.
c) Die doppelte Frequenz wird bei einem viertel der Pendellänge erreicht.

4. Zum Nachweis der Erdrotation verwendete L. Foucault (1851) ein 67 m langes Pendel.
   Berechnen Sie die Periodendauer.

geg. Pendellänge 67 m $\quad g = 9{,}81\dfrac{m}{s^2} \quad$ ges. T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{67\ m}{9{,}81\dfrac{m}{s^2}}} \approx \underline{\underline{16{,}42\ s}}$$

Die Periodendauer beträgt $\underline{\underline{T \approx 16{,}42\ s}}$

5. Wie lang muss ein Fadenpendel sein, dass an der Erdoberfläche (g = 9,81 m/s^2) bei kleiner Amplitude mit der Periodendauer T = 1 s schwingt?

geg. $g = 9{,}81\dfrac{m}{s^2} \quad T = 1\,s \qquad$ ges. Pendellänge l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow l = g\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$l = 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{1\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0{,}25\ m}}$$

Die Pendellänge beträgt $\underline{\underline{l = 0{,}25\ m}}$

6. Ein Fadenpendel schwingt mit der Periodendauer T_1 = 2,15 s.
Wenn man den Faden um 80 cm verlängert,
erhöht sich die Periodendauer auf 2,80 s.
Berechnen Sie aus diesen genau messbaren Angaben die Fallbeschleunigung für den Ort, an dem das Pendel schwingt.

geg. $T_1 = 2{,}15\ s \quad l_1 = l \quad T_2 = 2{,}8\ s \quad l_2 = l + \Delta l \quad \Delta l = 0{,}8\ m \qquad$ ges. g

Ansatz: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \Rightarrow l = g\cdot\left(\dfrac{T_1}{2\pi}\right)^2$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l+\Delta l}{g}} \Rightarrow l = g\cdot\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \Delta l$$

Elemination von l durch gleichsetzen:

$$\Rightarrow g\cdot\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = g\cdot\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \Delta l$$

nach g auflösen:

$$\Rightarrow g = \frac{\Delta l}{\left(\dfrac{T_2}{2\pi}\right)^2 - \left(\dfrac{T_1}{2\pi}\right)^2} = \frac{(2\pi)^2\cdot\Delta l}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{(2\pi)^2\cdot 0{,}8\ m}{(2{,}8\ s)^2 - (2{,}15\ s)^2} \approx \underline{\underline{9{,}816\ \frac{m}{s^2}}}$$

Die Fallbeschleunigung beträgt $\underline{\underline{g \approx 9{,}816\ \dfrac{m}{s^2}}}$

7. Hängt man einen Körper der Masse m = 400 g an eine Schraubenfeder, so wird sie um 10 cm verlängert.
Mit welcher Frequenz schwingt dieses Federpendel?

geg. $m = 400\,g = 0{,}4\,kg \quad s = 10\,cm = 0{,}1\,m \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ ges. Frequenz f

Federpendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ mit $D = \frac{m \cdot g}{s}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m\cdot g}{s}}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{0{,}1\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}} \approx \underline{\underline{1{,}576\,/\,s}}$$

Die Frequenz beträgt $\underline{\underline{f \approx 1{,}576\,Hz}}$

8. Woran könnte es liegen, wenn eine Pendeluhr im Winter etwas schneller geht als im Sommer?

Im Winter, wenn es kälter ist, zieht sich das Pendel etwas zusammen (Wärmeausdehnung), ist also kürzer.
Bei kürzerer Pendellänge wird die Periodendauer geringer und damit die Frequenz größer.
Die Uhr geht etwas schneller.

9. Ein Fadenpendel mit einer bestimmten Frequenz wird auf den Mond gebracht. Ist dort seine Frequenz größer, gleich oder kleiner als auf der Erde? Begründen Sie.

Für die Periodendauer gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ für die Frequenz gilt: $f = \frac{1}{T}$

Auf dem Mond ist g kleiner, damit wird die Periodendauer T größer.
Das bedeutet für die Frequenz, das sie kleiner wird.
Das Pendel schwingt langsamer als auf der Erde.

10. Man möchte ein Fadenpendel herstellen, das in einer Sekunde genau eine Halbschwingung ausführt (Sekundenpendel). Welche Länge müsste das Pendel
a) am Äquator ($g = 9{,}78\,m/s^2$)
b) am Pol ($g = 9{,}83\,m/s^2$) haben?

geg. Äquator $g_Ä = 9{,}78\frac{m}{s^2}$ Pol $g_P = 9{,}83\frac{m}{s^2}$ Zeit für eine Halbschwingung $1\,s \Rightarrow T = 2\,s$

ges. Die jeweilige Pendellänge.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = g\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Äquator: $l = 9{,}78\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{2\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0{,}991\,m}}$ Pendellänge

Pol: $l = 9{,}83\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{2\,s}{2\pi}\right)^2 \approx \underline{\underline{0{,}996\,m}}$ Pendellänge

11. Ein Fadenpendel von der Länge 2 m wird auf die Länge 1 m verkürzt.
In welchem Verhältnis ändern sich die Schwingungszeiten?

geg. $l_1 = 2\,m \quad l_2 = 1\,m \qquad$ ges. $\frac{T_1}{T_2}$

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}} = \sqrt{\frac{l_1 \cdot g}{l_2 \cdot g}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{2\,m}{1\,m}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

Die Schwingungszeiten ändern sich im Verhältnis $\underline{\underline{\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414}}$

12. Mit einem genauen Pendel (Revisionspendel) von der Länge 1,2 m wird für eine Schwingung die Zeit T = 2,2 s ermittelt.
Wie groß ist die am Ort herrschende Fallbeschleunigung g?

geg. $l = 1{,}2\,m \quad T = 2{,}2\,s \quad$ ges. g

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{l}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \frac{1{,}2\,m}{\left(\frac{2{,}2\,s}{2\pi}\right)^2} \approx \underline{\underline{9{,}79\,\frac{m}{s^2}}}$$

Die Fallbeschleunigung am Messort beträgt $\underline{\underline{g \approx 9{,}79\,\frac{m}{s^2}}}$

13. An eine Schraubenfeder (D = 100 N/m) wird ein Körper der Masse 800 g gehängt, dann 4 cm aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und losgelassen.
Mit welcher Frequenz schwingt der Körper?

geg. $D = 100\,\frac{N}{m} = 100\,\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{m} = 100\,\frac{kg}{s^2} \qquad m = 0{,}8\,kg \qquad$ ges. f

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{0{,}8\,kg}{100\,\frac{kg}{s^2}}}} \approx \underline{\underline{1{,}779\,/\,s}}$$

Das Federpendel schwingt mit einer Frequenz von $\underline{\underline{f \approx 1{,}779\,Hz}}$