FOS: Die harmonische Schwingung

Beschreibung von Schwingungen.

Versuch:	Wir beobachten die Bewegung eines Fadenpendels

Lenken wir die Kugel aus und lassen sie los, dann führt sie eine sich ständig wiederholende Hin – und Herbewegung aus.
- Eine solche Bewegung heißt ***periodische Bewegung.***
- Eine vollständige Hin – und Herbewegung der Pendelkugel nennen wir ***eine Periode.***
- Die Zeit, in der das Pendel eine Periode ausführt, heißt ***Periodendauer T.***
- Während jeder Hin – und Herbewegung schwingt die Pendelkugel zum selben Umkehrpunkt und hat dort ihre größte Auslenkung.
  Die Auslenkung von der Mittellage zum Umkehrpunkt nennen wir ***Amplitude*** der Schwingung.
- Die Anzahl der Perioden pro Sekunde heißt ***Frequenz f.***

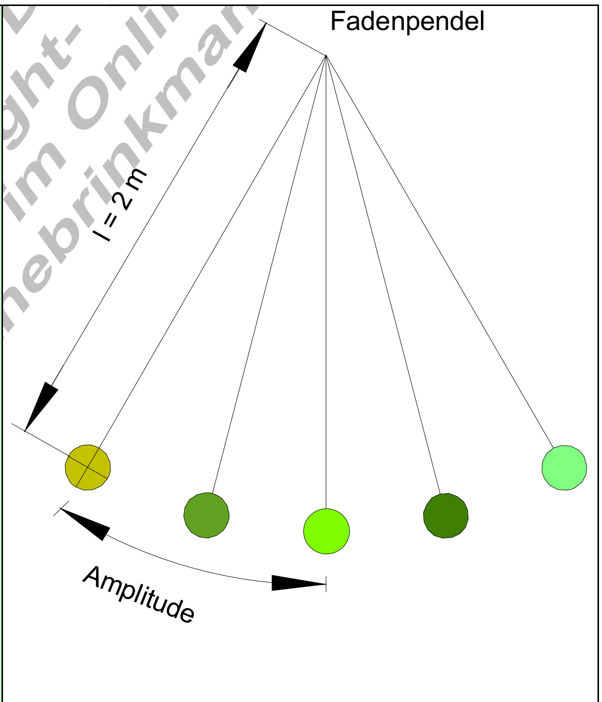
Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ bzw. Schwingungsdauer $T = \frac{1}{f}$

Versuch:
Wir lenken ein Fadenpendel mit der Pendellänge l = 2 m um 40 cm aus und messen die Zeit T für eine Periode.
Wir bestimmen die Zeit für n = 10 Schwingungen t = 28 s.
Die Periodendauer beträgt
28 s/10 = 2,8 s.

Wie wiederholen den Versuch mit der halben Amplitude 20 cm.
Die Periodendauer beträgt wieder 2,8 s.

Wir wiederholen den Versuch bei kürzeren Pendellängen.
Die Ergebnisse schreiben wir in eine Tabelle.

Wir berechnen die Frequenz f = n/t

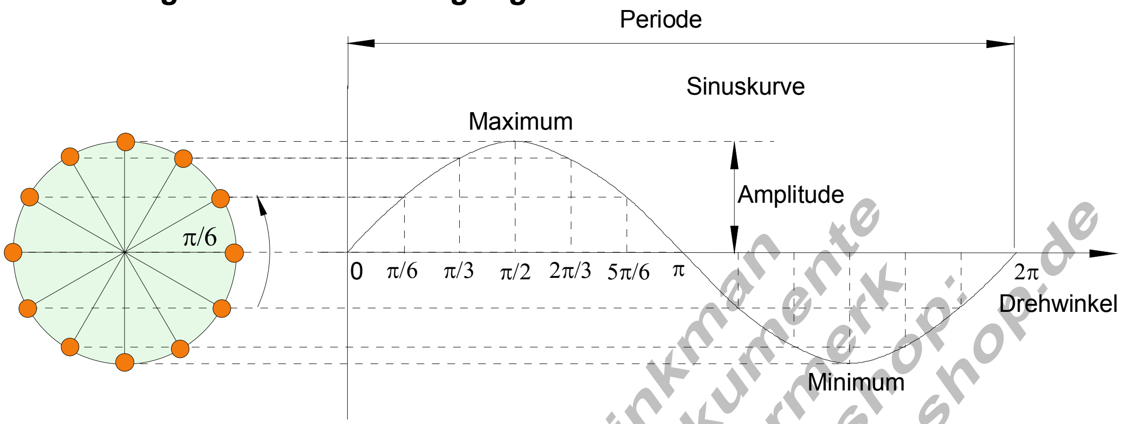


Pendellänge **l** in m	2	1	0,5	0,25
Anzahl der Schwingungen **n**	10	10	10	10
Zeit **t** für n Schwingungen in s	28	20	14	10
Periodendauer **T = t/n** in s	2,8	2	1,4	1
Frequenz **f = n/t** in Hz	0,36	0,5	0,71	1

Die harmonische Schwingung

Eine Stimmgabel erzeugt einen Ton. Ihre Zinken zeigen dabei eine besonders gleichmäßige Hin – und Herbewegung. Deren Aufzeichnung ergibt eine Sinuskurve. Eine solche Schwingung nennen wir harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

Darstellung von Sinusschwingungen



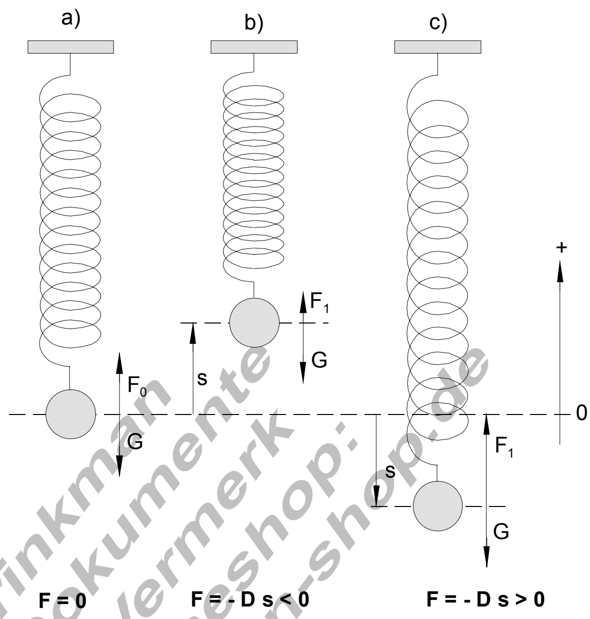
Welches Kraftgesetz sorgt für harmonische Schwingungen?

Untersuchung am Federpendel.

a) In der Gleichgewichtslage hebt die nach oben gerichtete (positive) Zugkraft F_0 der Feder die nach unten gerichtete (negative) Gewichtskraft G gerade auf. Es gilt $G = -F_0$.
Also ist die Gesamtkraft $F = G + F_0 = 0$

b) Nun wird der Körper um die Strecke $s > 0$ nach oben ausgelenkt. Dann verkleinert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - D\,s$.
Die Gewichtskraft überwiegt.
Es ergibt sich nach unten die resultierende Kraft:
$F = G + F_1 = G + F_0 - D\,s = 0 - D\,s$

$$\mathbf{F = - D\,s < 0}$$



c) Lenkt man den Körper um die Strecke $s < 0$ nach unten aus, so vergrößert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - D\,s$.
Beachten Sie, dass hier s negativ, also - D s positiv ist.
Jetzt überwiegt die Federkraft.
Die resultierende Kraft nach oben ist:
$F = G + F_1 = G + F_0 - D\,s = 0 - D\,s$

$$\mathbf{F = - D\,s > 0}$$

Das Federpendel nach der Auslenkung s:

a) in der Gleichgewichtslage

b) die Gewichtskraft überwiegt

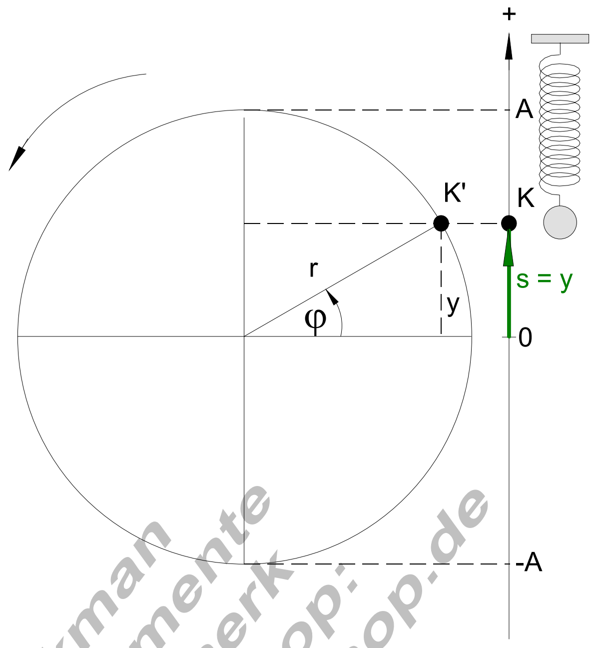
c) die Federkraft überwiegt

Die Rückstellkraft F ist also proportional zur Auslenkung s.
Es gilt das Elongation – Kraft – Gesetz:

$$\mathbf{F = - D\,s}$$

Versuch:	Wir befestigen einen Korken K' auf dem Rand einer vertikal gestellten drehbaren Scheibe. Die Drehzahl stellen wir so ein, dass die Umlaufdauer des Korkens gleich der Periodendauer des Federpendels ist. In der Schattenprojektion entsteht ein vertikaler Strich, an dem der Korkenschatten auf und ab gleitet. Der Kugelschatten des Federpendels vollführt die gleiche Bewegung.

Auswertung:



Während der Korken K’ auf einem Kreis mit dem Radius r umläuft, pendelt die Kugel K auf der s – Achse um ihre Gleichgewichtslage s = 0.
Diese liegt in der Mitte zwischen den beiden Umkehrpunkten s = A = r und s = - A = - r.
Der positive Wert A heißt Amplitude der Schwingung.
Sie ist die maximale Auslenkung aus der Gleichgewichtslage.

Für die Auslenkung s gilt:

$$s = y = r \cdot \sin\varphi = A \cdot \sin\varphi$$

Das entspricht einer harmonischen Schwingung.

Die Winkelgeschwindigkeit

Bei einer Kreisbewegung mit konstanter Drehzahl nimmt der Winkel φ proportional mit der Zeit zu. Ähnlich, wie bei einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ ist, kann auch für die Drehbewegung eine Winkelgeschwindigkeit definiert werden:

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\varphi}{t}$

Damit gilt für die harmonische Schwingung: $s(t) = A \cdot \sin\omega t$

Für die Winkelgeschwindigkeit gelten folgende Zusammenhänge:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Herleitung der Schwingungsgleichung

Das lineare Kraftgesetz diktiert den Bewegungsablauf des schwingenden Körpers.
Mit $F = m \cdot a$ ist die Beschleunigung a(t) zu jedem Zeitpunkt t festgelegt durch die Gleichung $m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$ (1)
Mit den Regeln der Differentialrechnung gilt: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

$\Rightarrow$ $m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t)$ (2) (Differentialgleichung)

Die Allgemeine Lösung lautet:

$$\underline{\underline{s(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)}} \qquad (\text{ A = Amplitude })$$

Probe: $\dot{s}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$

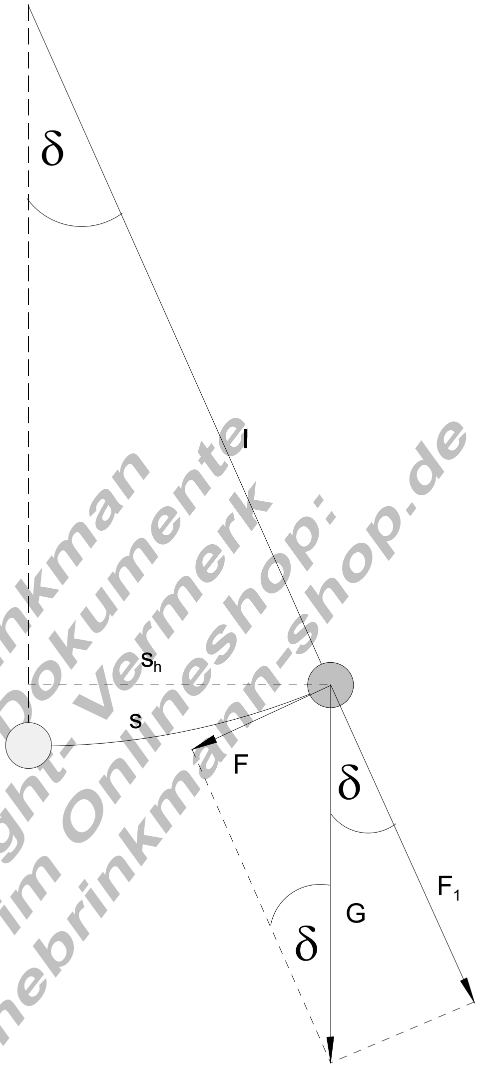
$$\ddot{s}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

Wir setzen $\ddot{s}(t)$ in Gleichung (2) ein und erhalten $-m \cdot \omega^2 \cdot s(t) = -D \cdot s(t)$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt daraus für die Schwingungsdauer $\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}}$

Merksatz:	Eine harmonische Schwingung lässt sich beschreiben durch: Das Zeit - Weg - Gesetz: $s(t) = A \cdot \sin\left(\omega t\right)$ Das Zeit - Geschwindigkeits - Gesetz: $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t\right)$ Das Zeit - Beschleunigungs - Gesetz: $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega t\right)$ mit der Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ (f ist die Frequenz, T die Periodendauer, A die Amplitude)

Das Fadenpendel



Die Schwingung ist nur dann harmonisch, wenn F proportional zur Auslenkung s ist.
Nun liefert das Kräfteparallelogramm:

$F = m \cdot g \cdot \sin\delta = m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right)$ denn $s = l \cdot \delta$

Wenn $s \ll l$ gilt, so ist s näherungsweise gleich der horizontalen Auslenkung s_h und

es gilt: $\sin\delta = \frac{s_h}{l} \approx \frac{s}{l}$

Das lineare Kraftgesetz für kleine Auslenkungen lautet dann:

$F = m \cdot g \cdot \sin\delta = m \cdot g \cdot \frac{s}{l} = \left(\frac{m \cdot g}{l}\right) \cdot s$

Wir können demnach das Fadenpendel mit jeder gewünschten Genauigkeit als harmonischen Schwinger der

Richtgröße $D = \frac{m \cdot g}{l}$ betrachten,

wenn wir nur die Amplitude hinreichend klein wählen.

Mit $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$ folgt dann für die Periodendauer:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = \underline{\underline{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

Merksatz:	Ein Fadenpendel schwingt bei hinreichend kleiner Amplitude harmonisch. Seine Periodendauer ist dann: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Bemerkung: Über die Periodendauer des Fadenpendels lässt sich sehr genau die Erdbeschleunigung g ermitteln.
Dazu muss die Fadenlänge und die Periodendauer gemessen werden.