Aufgaben: Lineare Ungleichungen und Lineare Optimierung.

1. Stellen Sie die folgenden Ungleichungen nach y um:

a) $\frac{1}{2}x \le 5 - 3y + 12$ b) $\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x - 12 \ge \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x - 15$ c) $-y + \frac{2}{3}x + \frac{2}{5} \ge 3 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x$

2. Bestimmen Sie den Graphen der Lösungsmenge der linearen Ungleichungen:

a) $3x + 2y + 6 < 0$ $D = \{ x \mid -3 \le x \le 2 \}$ $W = \{ y \mid -6 \le y \le 2 \}$

b) $\frac{1}{2}x \ge \frac{1}{2}y - 3$ $D = \{ x \mid -6 \le x \le 0 \}$ $W = \{ y \mid 0 \le y \le 6 \}$

c) $\frac{8}{3}x \ge -y - 17\frac{2}{3}$ $D = \{ x \mid -9 \le x \le 0 \}$ $W = \{ y \mid 0 \le y \le 7 \}$

3. Bestimmen Sie den Graphen der Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems und seine Eckpunkte.

a)
$$\frac{1}{2}x \ge \frac{1}{2}y - 3 \wedge$$
$$-3x \ge 3y \wedge$$
$$x \le \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \wedge$$
$$2y \ge -4x - 18$$
$D = \{ x \mid -6 \le x \le 0 \}$

$W = \{ y \mid -9 \le y \le 6 \}$

b)
$$-\frac{1}{2}x \ge -3 + \frac{1}{2}y \wedge$$
$$\frac{1}{2}x \ge \frac{1}{2}y \wedge$$
$$2y \ge 6 - 4x \wedge$$
$$x \le \frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2}$$
$D = \{ x \mid 0 \le x \le 6 \}$

$W = \{ y \mid -9 \le y \le 6 \}$

c)
$$-x \ge 6 - 3y \wedge$$
$$\frac{1}{5}x \ge \frac{1}{5}y - 1 \wedge$$
$$x \le -\frac{1}{3}y - 1$$
$D = \{ x \mid -6 \le x \le 0 \}$

$W = \{ y \mid -3 \le y \le 5 \}$

d)
$$x \ge -3y + 6 \wedge$$
$$\frac{1}{5}x - 1 \le -\frac{1}{5}y \wedge$$
$$1 - x \le -\frac{1}{3}y$$
$D = \{ x \mid 0 \le x \le 6 \}$

$W = \{ y \mid -3 \le y \le 5 \}$

e)
$$\begin{aligned} &y \ge x - 2 \wedge \\ &2x + y \ge 10 \wedge \\ &2x + 3y \le 24 \end{aligned}$$

$D = \{\, x \mid 0 \le x \le 6 \,\}$

$W = \{\, y \mid 0 \le y \le 7 \,\}$

f)
$$\begin{aligned} &y + \frac{2}{3}x \ge \frac{11}{3} \wedge \\ &y - \frac{2}{5}x \ge 1 \wedge \\ &\frac{2}{7}x + y \le 4 \end{aligned}$$

$D = \{\, x \mid -2 \le x \le 5 \,\}$

$W = \{\, y \mid 0 \le y \le 5 \,\}$

g)
$$\begin{aligned} &-y \ge -\frac{5}{7}x - 11\frac{1}{14} \wedge \\ &-y \ge \frac{5}{7}x - 3\frac{13}{14} \wedge \\ &\frac{8}{3}x \ge -y - 17\frac{2}{3} \wedge \\ &-y \le -1 \wedge \\ &-y \le -\frac{8}{3}x - 9 \end{aligned}$$

$D = \{\, x \mid -9 \le x \le -1 \,\}$

$W = \{\, y \mid 0 \le y \le 8 \,\}$

h)
$$\begin{aligned} &-\frac{2}{3}x \le 10\frac{1}{3} - y \wedge \\ &\frac{2}{3}x \le 3\frac{2}{3} - y \wedge \\ &y - 3\frac{1}{2}x \ge 11\frac{2}{3} \wedge \\ &y + 21\frac{2}{3} \ge -3\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$D = \{\, x \mid -8 \le x \le -2 \,\}$

$W = \{\, y \mid -5 \le y \le 7 \,\}$

i)
$$\begin{aligned} &-\frac{2}{3}x \le 3\frac{2}{3} - y \wedge \\ &\frac{2}{3}x \le 10\frac{1}{3} - y \wedge \\ &y - 3\frac{1}{3}x \ge -21\frac{2}{3} \wedge \\ &y + 3\frac{1}{3}x \ge 11\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$D = \{\, x \mid 2 \le x \le 8 \,\}$

$W = \{\, y \mid -5 \le y \le 7 \,\}$

$-\frac{y}{2} - 2 \geq \frac{3}{2}x \wedge$

$y - 2x \geq 1 \wedge$ $\qquad D = \{\, x \mid -6 \leq x \leq -1 \,\}$

j) $-2y \leq x + 8 \wedge$

$-\frac{1}{11}y \geq -\frac{2}{11}x - 1 \wedge$ $\qquad W = \{\, y \mid -3 \leq y \leq 2 \,\}$

$3y - x \leq 8$

$3y + x \leq 8 \wedge$

$-\frac{1}{11}y \geq \frac{2}{11}x - 1 \wedge$ $\qquad D = \{\, x \mid 1 \leq x \leq 6 \,\}$

k) $y \geq \frac{1}{2}x - 4 \wedge$ $\qquad W = \{\, y \mid -3 \leq y \leq 2 \,\}$

$-2y \leq 4x - 2 \wedge$

$-\frac{1}{3}y \geq -x + 1\frac{1}{3}$

Aufgaben Lineare Optimierung

1. Eine Fabrik produziert Diesellokomotiven und Bagger. Die Produktionsabteilung kann pro Tag höchstens für 10 Lokomotiven oder 15 Bagger Einzelteile herstellen. Die Montageabteilung für Bagger kann pro Tag höchstens 9 Stück zusammenbauen. Die Montageabteilung für Lokomotiven kann pro Tag höchstens 6 Stück zusammenbauen. Der Gewinn beträgt 11.000 € bei einem Bagger und 14.000 € bei einer Lokomotive.
Bestimmen Sie das Produktionsprogramm, für welches der Gewinn optimiert wird und die Auslastung der Kapazitäten für Produktions- und Montageabteilungen.
(Bagger $\hat{=}$ x; Lokomotiven $\hat{=}$ y).

2. Eine Maschinenfabrik produziert Rechenmaschinen und Schreibmaschinen. Sie kann pro Tag entweder 700 Rechenmaschinen oder 850 Schreibmaschinen herstellen. Wenn das Montageband für Rechenmaschinen mit Höchstgeschwindigkeit läuft, können 500 Rechenmaschinen montiert werden. Auf dem Montageband für Schreibmaschinen können bei Höchstgeschwindigkeit 650 Schreibmaschinen montiert werden.
Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm, den optimalen Gewinn und die Kapazitätsauslastungen für Produktion und Montagebänder, wenn eine Rechenmaschine
420 € und eine Schreibmaschine 280 € Gewinn einbringt.
(Rechenmaschine $\hat{=}$ x; Schreibmaschine $\hat{=}$ y).

3. Ein Kamerawerk produziert Kameras und Ferngläser. Es kann pro Tag entweder 800 Kameras oder 960 Ferngläser herstellen. In der Montagehalle für Kameras können pro Tag höchstens 550 Kameras, in der Montagehalle für Ferngläser

höchstens 600 Ferngläser zusammengebaut werden. Der Gewinn für eine Kamera beträgt 240 €, für ein Fernglas 360 €.
Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm, den optimalen Gewinn und die Auslastung der Kapazitäten für Werk und Montagehallen mit den betriebswirtschaftlichen Schlussfolgerungen!
(Kameras ≙ x; Ferngläser ≙ y).

4. Eine Flugzeugfabrik stellt Hubschrauber und Sportflugzeuge her. Sie kann pro Tag entweder 150 Hubschrauber oder 120 Sportflugzeuge herstellen. Auf dem Montageband für Hubschrauber können pro Tag höchstens 70 Hubschrauber, auf dem Montageband für Sportflugzeuge höchstens 80 Sportflugzeuge zusammengebaut werden. Der Gewinn für einen Hubschrauber beträgt 11.000 €, für ein Sportflugzeug 18.000 €.
Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm, den optimalen Gewinn und die Auslastung der Kapazitäten für Fabrik und Montagebänder, und ziehen sie die betriebswirtschaftlichen Schlussfolgerungen!
(Sportflugzeuge ≙ x; Hubschrauber ≙ y).

5. Eine Bootswerft baut Motor- und Segelyachten. Sie kann pro Tag höchstens 15 Motor- oder 10 Segelyachten herstellen. In der Montageabteilung für Motoryachten können pro Tag höchstens 9 Motoryachten, in der Montageabteilung für Segelyachten höchstens 6 Segelyachten zusammengebaut werden. Eine Segelyacht kostet 120.000 €,
eine Motoryacht 160.000 €.
Bestimmen Sie das Produktionsprogramm der Werft, das den maximalen Gewinn verspricht, und ermitteln Sie die Kapazitätsauslastungen für Werft- und Montagehallen mit den daraus resultierenden wirtschaftlichen Schlussfolgerungen!
(Segelyachten ≙ x; Motoryachten ≙ y).

6. Ein Photogeschäft will sein Lager mit Photoapparaten und Filmkameras auffüllen. Dafür stehen 91.200 € zur Verfügung. Eine Filmkamera kostet im Einkauf 380 € ein Photoapparat 285 €. Der Gewinn für eine Filmkamera beträgt 150 €, für einen Photoapparat 90 €. Aufgrund der Erfahrungssätze werden mindestens doppelt so viele Photoapparate gekauft wie Filmkameras. Daher entschließt man sich, mindestens doppelt so viele Photoapparate anzuschaffen wie Filmkameras.
Welche Mengen an Einzelgeräten sollen bestellt werden, damit der Gewinn möglicht groß wird?
(Photoapparate ≙ x; Filmkameras ≙ y).

7. Eine Elektrohandlung will ihr Lager mit Gefrierschränken und – truhen auffüllen. Hier für stehen 20.000 € zur Verfügung. Eine Truhe kostet im Einkauf 440 €, ein Schrank
560 €. Bei einer Truhe beträgt der Gewinn 240 €, bei einem Schrank 160 €. Aufgrund der Erfahrungssätze werden höchstens dreimal so viel Truhen gekauft wie Schränke. Man entschließt sich daher, an Truhen möglichst höchstens das Dreifache der Anzahl der Schränke anzuschaffen. Welche Menge an Einzelgeräten muss bestellt werden, damit der Gewinn optimal wird?
(Schränke ≙ x; Truhen ≙ y).

8. Eine Weinhandlung bestellt bei einer Winzergenossenschaft zwei Sorten Wein, Riesling und Sylvaner. Sie kann pro 1000 Liter Riesling 2700 € und pro 1000 Liter

Sylvaner 2400 € verdienen. Das Geschäft kommt aber nur dann zustande, wenn sie mindestens doppelt so viel Sylvaner abnimmt wie Riesling, der in diesem Jahr besonders gut ist und daher gut geht.
Da der Lagerraum beschränkt ist, darf die gesamte Lieferung 2800 Liter nicht überschreiten.
Bestimmen Sie die Liefermenge an Riesling und Sylvaner, die optimalen Gewinn verspricht,
und berechnen Sie den optimalen Gewinn in €.
(Riesling $\triangleq$ x; Sylvaner $\triangleq$ y).

9. Eine Hallensportanlage mit einer Fläche von mindestens 4000 m^2 soll mit einem federnden Belag versehen werden. Um eine möglicht hohe Lebensdauer zu erreichen, sollen die Pflegekosten nicht unter 4.500 € aber auch nicht über 7200 € liegen. Damit die Halle nach der Benutzung immer schnell wieder betriebsbereit ist, werden zwei Firmen mit der Pflege des Belags beauftragt. Firma A pflegt 1 m^2 des Belags für 1,20 € pro Jahr, Firma B benötigt dafür
1,80 €. Da Firma A zu einem hohen Grad mit automatischen Maschinen arbeitet, ist ihr Wirkungsgrad bis um ein Drittel größer als der von B. Man rechnet aber infolge der Störanfälligkeit der Automaten und der damit verbundenen Reparaturzeiten mit einer mindestens ein viertel niedrigeren Leistung als bei B.
Bestimmen Sie den Arbeitseinsatz der Firma a und B unter Berücksichtigung minimaler Kosten.
(Firma A $\triangleq$ x; Firma B $\triangleq$ y).

10. Von einer Baugrube sollen mindestens 1200 m^3 Erdaushub abgefahren werden. Dafür stehen ein Magirus, der höchstens 2,5 m^3 fasst, und ein Mercedes der höchstens 1,5 m^3 fasst, zur Verfügung. Der Mercedes kann höchstens bis eineinhalb mal so oft fahren wie der Magirus, weil der größere Wagen wegen einer niedrigen Unterführung einen Umweg in Kauf nehmen muss. Da die Kippe für jeden Wagen die gleiche Gebühr verlangt, fährt der Magirus bis zum $\frac{5}{3}$ fachen wirtschaftlicher als der Mercedes. Der Magirus kostet 10,50 € pro m ^{3},
der Mercedes 7 € pro m ^{3}.
Bestimmen Sie die Abfahrkombination beider Wagen, bei der die Kosten minimal werden.
(Magirus $\triangleq$ x; Mercedes $\triangleq$ y).

11. Für den Neubau eines Hauses werden mindestens 1000 m ^{3} Beton benötigt, welcher als Fertig- oder Ortbeton hergestellt werden soll. Des höheren Preises wegen soll der Anteil an Fertigbeton möglichst klein gehalten werden. Da sich die Herstellung von Ortbeton auf der Baustelle aber nur für größere Bauteile, die in einer Phase gegossen werden können, lohnt, rechnet man mit dem Anwachsen des Fertigbetonanteils auf mindestens $\frac{1}{3}$ des Ortbetonanteils. Durch Bereitstellen einer Ersatzbetonpumpe für den Notfall hofft man, die Effektivität des Ortbetonanteils auf mindestens $\frac{7}{3}$ des Fertigbetonanteils zu vergrößern.
1 m^3 Fertigbeton kostet 85 €, 1 m^3 Ortbeton 68 €.

Bestimmen Sie die Kombination aus Fertig- und Ortbeton, die minimale Kosten verursacht.
(Fertigbeton $\triangleq$ x; Ortbeton $\triangleq$ y).

12. Ein Straßenteilstück von wenigsten 2,8 km Länge soll so schnell wie möglich einen neuen Belag erhalten. Dafür stehen zwei Spezialmaschinen zur Verfügung. Maschine A stellt pro Tag 35 lfdm Fahrbahnbelag her, Maschine B 21 lfdm. Die stark automatisierte Maschine A benötigt kaum Bedienungspersonal. Dadurch arbeitet sie bis zu $^1\!/_5$ effektiver als B. Der hohe Grad der Automatisierung macht sie aber anfälliger, so dass bedingt durch häufige Reparaturen, der Wirkungsgrad von Maschine B bis höchstens $^1\!/_3$ höher anzusetzen ist als der von A. Maschine A kostet pro lfdm Fahrbahnbelag 150 €, Maschine B 120 €. Wegen der Dringlichkeit der Arbeiten sollen beide Maschinen eingesetzt werden.
Bestimmen Sie das Herstellungsprogramm für beide Maschinen, das minimale Kosten verursacht.
(Maschine A $\triangleq$ x; Maschine B $\triangleq$ y).