

Lineare Ungleichungssysteme/Lineare Optimierung

Beispiel 1:

Ein Gärtner möchte ein 100 m² großen Garten mit Rosen und/oder Nelken bepflanzen. Er kann maximal 720 € investieren und höchstens 60 m² für Nelken reservieren.

Wie viele m² sollen von jeder Sorte bepflanzt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird, wobei von folgenden Daten auszugehen ist:

	Rosen	Nelken
Arbeits – und Materialkosten (€/ m ²)	6	9
Gewinn (€/ m ²)	1	2

Entscheidungsvariablen des Problems sind:

x_1 mit Rosen zu bepflanzende Fläche (in m²)

x_2 mit Nelken zu bepflanzende Fläche (in m²)

Die mathematische Formulierung des Problems lautet:

$$\max z(x) = x_1 + 2x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 720$$

$$x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$$

Lösung nach dem Simplexalgorithmus

Nach Überführung in die Standardform lautet das lineare Programm:

$$\max z(x) = x_1 + 2x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + u_1 = 100$$

$$6x_1 + 9x_2 + u_2 = 720$$

$$x_2 + u_3 = 60$$

$$x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge u_1 \geq 0 \wedge u_2 \geq 0 \wedge u_3 \geq 0$$

Eine zulässige Basislösung ist gegeben durch:

$x_1 = x_2 = 0$ und $u_1 = 100$, $u_2 = 720$, $u_3 = 60$.

Die Simplexmethode führt dann zu folgender Abfolge von Tableaus.

(Das Pivotelement ist jeweils gekennzeichnet).

Tableau 1

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	RS
u_1	1	1	1	0	0	100
u_2	6	9	0	1	0	720
u_3	0	1	0	0	1	60
	1	2	0	0	0	Z

Tableau 2

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	RS
u_1	1	0	1	0	-1	40
u_2	6	0	0	1	-9	180
x_2	0	1	0	0	1	60
	1	0	0	0	-2	Z-120

Tableau 3

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	RS
u_1	0	0	6	-1	3	60 :6
x_1	6	0	0	1	-9	180 :6
x_2	0	1	0	0	1	60
	0	0	0	-1	-3	6Z-900 :6

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	RS
u_1	0	0	1	-1/6	1/2	10
x_1	6	0	0	1	-3/2	30
x_2	0	1	0	0	1	60
	0	0	0	-1/6	-1/2	Z-150

$$u_1 = 10, x_1 = 30, x_2 = 60, Z = 150$$

Ergebnis: Für eine Gewinnoptimierung (Maximum) werden

$x_1 = 30 \text{ m}^2$ Rosen und

$x_2 = 60 \text{ m}^2$ Nelken angebaut.

$u_1 = 10 \text{ m}^2$ bleiben ungenutzt.

$$\text{Gewinn: } Z_{\max} = x_1 + 2x_2 = 30 \text{ €} + 120 \text{ €} = \underline{150 \text{ €}}$$