Lineare Ungleichungssysteme/Lineare Optimierung

Problemstellung:
In einer Fabrik werden Kassettenrecorder und Taschenrechner hergestellt.
Pro Tag können Einzelteile für entweder 285 Recorder oder 380 Rechner hergestellt werden oder eine Kombination von beiden.
Die Montageabteilung für Recorder kann pro Tag im Höchstfall 150 Recorder, die Montageabteilung für Rechner im Höchstfall 240 Rechner zusammenbauen.
Die Firma verdient pro Recorder 11 € und pro Rechner 4 €.
Wie viel Stück von jeder Sorte muss das Werk herstellen, damit ein optimaler Gewinn erzielt werden kann?

Überlegungen zur Mathematisierung des Problems:

x sind die Anzahl der herzustellenden Recorder.
y sind die Anzahl der herzustellenden Rechner.

Welche Werte können x und y annehmen?

$x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad y \in \mathbb{N}$

Die Werkstatt kann für 285 Recorder Einzelteile erstellen.
Wie viel der Kapazität wird für einen Recorder beansprucht?

Kapazität für einen Recorder $\hat{=} \frac{1}{285}$ desgleichen

Kapazität für einen Rechner $\hat{=} \frac{1}{380}$

Für x Recorder wird x-mal soviel Kapazität beansprucht, also

Kapazität für x Recorder $\hat{=} \frac{x}{285}$ desgleichen

Kapazität für y Rechner $\hat{=} \frac{y}{380}$

Beide Teilkapazitäten zusammen ergeben höchstens die Gesamtkapazität, die 1 (ein Tag) entspricht.

Also: $\frac{x}{285} + \frac{y}{380} \leq 1$

Was wissen wir noch?
Die Montageabteilung für Recorder kann höchstens 150 Stück am Tag zusammenbauen.
Das bedeutet: $x \leq 150$
Die Montageabteilung für Rechner kann pro Tag höchstens 240 Stück zusammenbauen.
Das bedeutet: $y \leq 240$

Was wissen wir über den Gewinn?

$G = x \cdot 11 + y \cdot 4$ Der Gewinn soll optimal sein.

Das bedeutet, x und y sollen unter den obigen Bedingungen optimal gewählt werden.

Zusammenfassung aller Bedingungen:

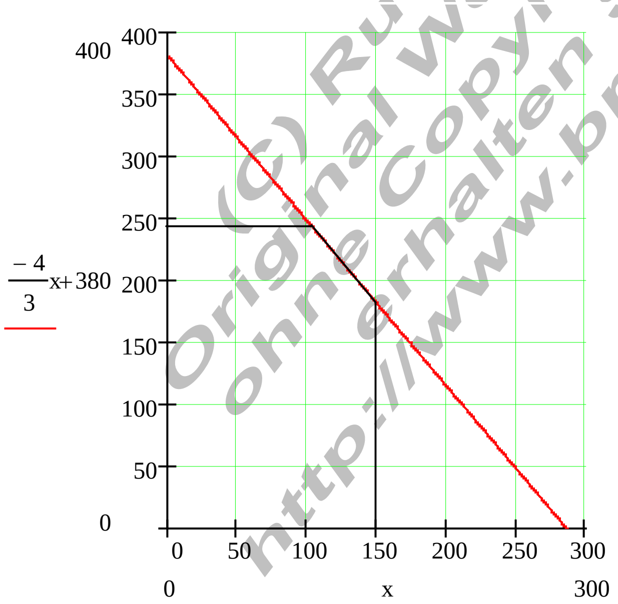
$$\frac{x}{285} + \frac{y}{380} \le 1$$
$$\wedge \quad x \le 150$$
$$\wedge \quad y \le 240$$

Das ist ein System von linearen Ungleichungen.
Dieses soll graphisch dargestellt werden.

1. Schritt: $\frac{x}{285} + \frac{y}{380} \le 1$ ist nach y aufzulösen.

$$\Rightarrow y \le -\frac{4}{3}x + 380$$

Der Graph dieser linearen Funktion ist in ein Koordinatensystem zu zeichnen.



Werden die Achsenabschnittspunkte bestimmt, so lässt sich die Gerade ziemlich genau zeichnen.

$P_y(0 \mid 380)$

$$y = -\frac{4}{3}x + 380$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}x + 380 = 0$$

$$\frac{4}{3}x = 380$$

$$x = \frac{380 \cdot 3}{4}$$

$$x = 285 \quad \Rightarrow \quad P_x(285 \mid 0)$$

Aufstellung der Zielfunktionsgleichung:
Der Gewinn G für x Recorder und y Rechner beträgt:

$G = x \cdot 11 + y \cdot 4$ auflösen nach y ergibt:

$y = -\frac{11}{4}x + \frac{G}{4}$ das ist eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{11}{4}$, sie geht durch den Koordinatenursprung, wenn der Gewinn 0 ist.

Steigt der Gewinn, so ist das gleichbedeutend mit einer Parallelverschiebung der Geraden.

Wird die Gerade bis an den Rand der Lösungsmenge verschoben, erhält man das Gewinnoptimum.

Der Punkt $P(150 \mid y)$ ergibt das Optimum also

$y = -\frac{1}{4} \cdot 150 + 380 = 180$ ist der zugehörige y-Wert.

Der optimale Gewinn beträgt:

$$G = \left(11 \cdot x + 4 \cdot y\right) \text{ €}$$

$$G = \left(11 \cdot 150 + 4 \cdot 180\right) \text{ €}$$

$$G = 2370 \text{ €}$$

Der optimale Gewinn beträgt 2370 € pro Tag.

Auslastungsbetrachtungen:

Es galt: $\frac{x}{285} + \frac{y}{380} \leq 1$ für die Auslastung der Einzelteilfertigung.

Wir setzen das Wertepaar für den optimalen Gewinn ein:

$$\frac{150}{285} + \frac{180}{380} \leq 1$$

$$\frac{10}{19} + \frac{9}{19} \leq 1$$

$$\frac{19}{19} \leq 1$$

$$1 \cdot 100\% = 100\%$$

Das bedeutet, die Fabrik ist mit der Herstellung von Einzelteilen für Recorder und Taschenrechner zu 100 % ausgelastet.

Teilkapazität für die Montageabteilung Recorder:

$$x \leq 150$$

$$\frac{150}{150} \cdot 100\% = 1 \cdot 100\% = 100\%$$

Die Montageabteilung für Recorder ist zu 100% ausgelastet.

$$y \leq 240$$

$$\frac{180}{240} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$$

Die Montageabteilung für Taschenrechner ist nur zu 75% ausgelastet.