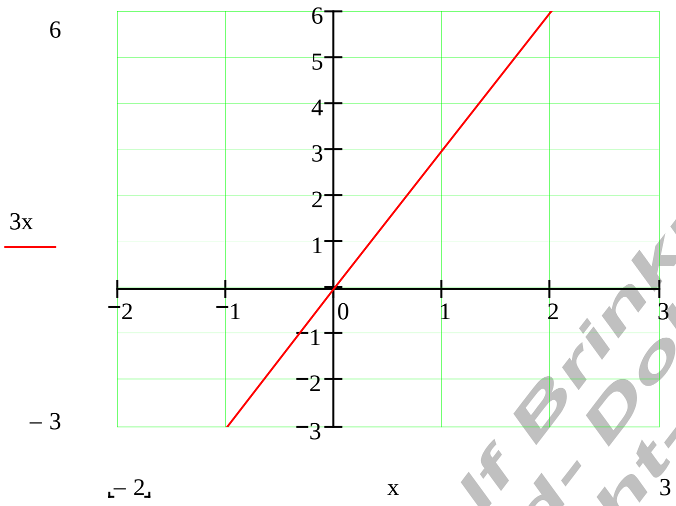
Lineare Funktionen

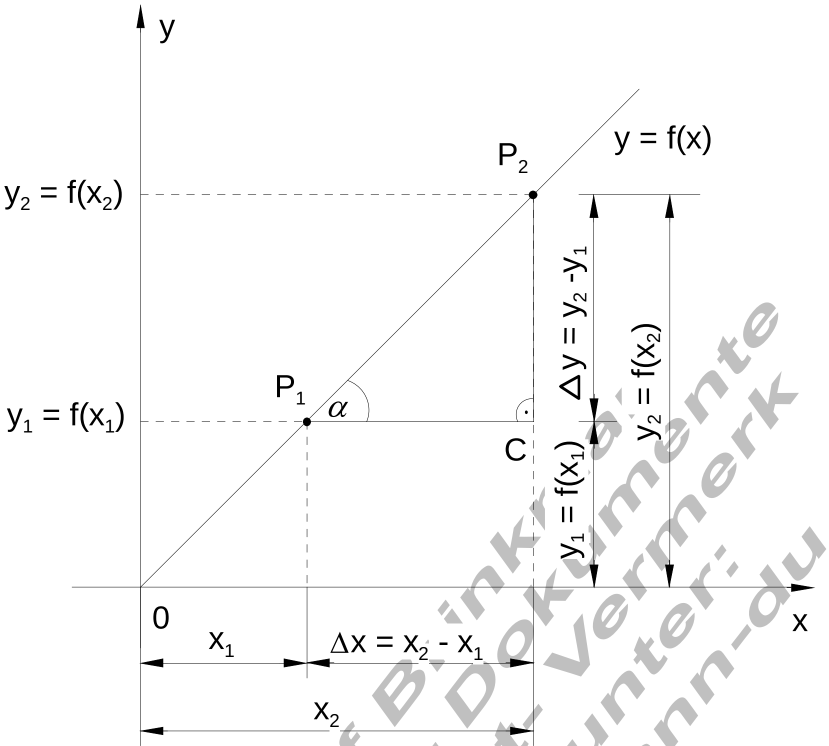
Es soll der Graph der Funktion $f = \{x, y \mid y = f(x) = 3x\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$
in den Bereichen
$D = \{x \mid -2 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$ und $W = \{x \mid -3 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$ erstellt werden.

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x) = 3x	-6	-3	0	3	6	9



Definition	Eine Funktion heißt **Lineare Funktion**, wenn der Graph der Funktion im rechtwinkligen Koordinatensystem eine Gerade ist. Sie heißt auch Funktion erster Ordnung oder Funktion ersten Grades.

Ermittlung der Steigung einer Linearen Funktion mittels Steigungsdreieck



Definition	Die Steigung in einer linearen Funktion ist gleich dem Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der beiden Katheten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks (Steigungsdreieck), dessen Hypotenuse Teil des Funktionsgraphen ist.

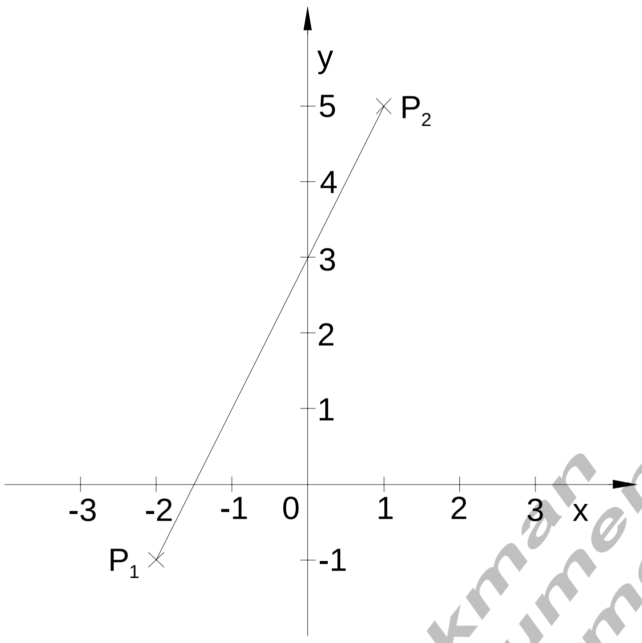
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Sind also zwei Punkte einer Geraden durch ihre Koordinaten gegeben, so kann man:
1. die Gerade zeichnen
2. die Steigung der Geraden mit Hilfe des Steigungsdreiecks ermitteln.

Beispiele:

Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(-2,-1)$ und $P_2(1,5)$ einer Geraden.
Gesucht ist der Graph und die Steigung der Geraden.

Die Verbindung der beiden Punkte P_1 und P_2 im Koordinatensystem ergibt den gesuchten Graph der Geraden.



Die Steigung der Geraden erhält man durch Berechnung:

$P_1(-2,-1) \Rightarrow x_1 = -2 \wedge y_1 = -1$

$P_2(1,5) \quad \Rightarrow x_2 = 1 \wedge y_2 = 5$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{1-(-2)} = \frac{5+1}{1+2} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$

Satz	Die allgemeine Form der linearen Funktion hat die Funktionsgleichung $y = f(x) = ax + b$ mit der Steigung m = a. Hieraus ergibt sich auch die Bezeichnung Funktion erster Ordnung oder ersten Grades, da die Variable x nur in der ersten Potenz erscheint.

$$f = \{x, y \mid y = f(x) = ax + b\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

Beweis:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad f(x_2) = ax_2 + b \qquad f(x_1) = ax_1 + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

$$\underline{\underline{m = a}}$$

Gegeben sind die beiden Punkte P_1(-2,-1) und P_2(1,5) einer Geraden.
Gesucht ist die Funktionsgleichung.

Berechnung der Steigung:

$$P_1(-2,-1) \Rightarrow x_1 = -2 \wedge y_1 = -1$$
$$P_2(1,5) \qquad \Rightarrow x_2 = 1 \wedge y_2 = 5$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{1-(-2)} = \frac{5+1}{1+2} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$
$$\underline{\underline{m = 2}}$$

Berechnung von b:

$$y = f(x) = mx + b \qquad y_1 = -1 \qquad x_1 = -2$$
$$-1 = f(-2) = 2 \cdot (-2) + b$$
$$-1 = -4 + b$$
$$-1 + 4 = b$$
$$\underline{\underline{b = 3}}$$

Die Funktionsgleichung:

$$y = f(x) = mx + b$$
$$y = f(x) = 2x + 3$$
$$f = \{x, y \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

Aufgabe:
Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(-1,-5)$ und $P_2(2,-1)$ einer Geraden.
Gesucht ist die Steigung m und die Funktionsgleichung.
Zeichne den Graphen.

$$f = \{x, y \mid y = f(x) = -2x + 3\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

Bestimmung der Achsenabschnitte:

Schnittpunkt mit der y – Achse:

Bedingung: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0,3)}}$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

Bedingung: $y = f(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = -2x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_x(\frac{3}{2},0)}}$

Allgemeine Berechnung:

$f = \{x, y \mid y = f(x) = mx + b\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ allgemeine Form der linearen Funktion

$P_x(x_0, 0)$ Bedingung für P_x

$0 = mx_0 + b \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{m} \Rightarrow \underline{\underline{P_x(-\frac{b}{m}, 0)}}$

$P_y(0; y_0)$ Bedingung für P_y

$y_0 = m \cdot 0 + b \Leftrightarrow y_0 = b \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0, b)}}$

Zusammenfassung:

Lineare Funktion: $f = \{x, y \mid y = f(x) = ax + b\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

Steigung einer Geraden: $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $P_y(0, b)$

Schnittpunkt mit der x – Achse: $P_x(-\frac{b}{m}, 0)$

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte $P_1(-3, -2)$ und $P_2(4, 2)$.

Gesucht:

a) Steigung m der Verbindungsgeraden P_1P_2.
b) Funktionsgleichung der Verbindungsgeraden.
c) Schnittpunkt der Geraden mit der Abszissenachse.
d) Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse.
e) Graph der Funktion in
$D = \{x \mid -3 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$
$W = \{y \mid -2 \le y \le 2\}_{\mathbb{R}}$

a)
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{2 + 2}{4 + 3} = \frac{4}{7}$$
$$\underline{\underline{m = \frac{4}{7}}}$$

b)

$$y = f(x) = mx + b \qquad P_1(-3,-2)$$

$$-2 = \frac{4}{7}\cdot(-3) + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{7} \approx -0{,}3$$

Funktion der Geraden: $\underline{\underline{f = \{x,y \mid y = f(x) = \frac{4}{7}x - \frac{7}{2}\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}}}$

c)

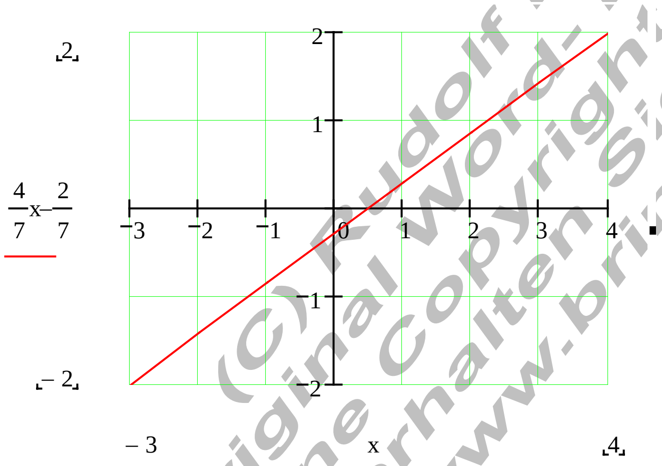
$$y = f(x) = \frac{4}{7}x - \frac{7}{2}$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{4}{7}x_0 - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_x(\frac{1}{2},0)}}$$

d)

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = \frac{4}{7}\cdot 0 - \frac{2}{7} = -\frac{2}{7} \approx 0{,}286 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0,-\frac{2}{7})}}$$

e)



Aufgaben:

Gegeben sind die Punkte P_1 und P_2 einer Geraden.
Bestimmen Sie:

a) den Steigungsfaktor m
b) den Schnittpunkt P_y mit der Ordinatenachse
c) die Funktionsgleichung der Geraden
d) den Schnittpunkt P_x mit der Abszissenachse
e) den Graphen der Funktion in den Mengen D und W

1. $P_1(3,4)$ $P_2(7,-1)$ $D=\{x \mid 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$ $W=\{y \mid -1 \le y \le 8\}_{\mathbb{R}}$
2. $P_1(-8,1)$ $P_2(2,-3)$ $D=\{x \mid -7 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$ $W=\{y \mid -3 \le y \le 1\}_{\mathbb{R}}$
3. $P_1(4,3)$ $P_2(-7,-1)$ $D=\{x \mid -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$ $W=\{y \mid -1 \le y \le 3\}_{\mathbb{R}}$
4. $P_1(4,2)$ $P_2(-4,-4)$ $D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$ $W=\{y \mid -4 \le y \le 2\}_{\mathbb{R}}$

Lösungen:

	m	P_y	y = f(x)	P_x
1	$-\frac{4}{5}$	$(0,7\frac{3}{4})$	$f(x)=-\frac{5}{4}x+7\frac{3}{4}$	$(6\frac{1}{5},0)$
2	$-\frac{2}{5}$	$(0,-\frac{11}{5})$	$f(x)=-\frac{2}{5}x-\frac{11}{5}$	$(-5\frac{1}{2},0)$
3	$\frac{4}{11}$	$(0,1\frac{6}{11})$	$f(x)=\frac{4}{11}x+1\frac{6}{11}$	$(-4\frac{1}{4},0)$
4	$\frac{3}{4}$	$(0,-1)$	$f(x)=\frac{3}{4}x-1$	$(1\frac{1}{3},0)$

Beispiel:

Gegeben: $f=\{x,y \mid y=f(x)=\frac{1}{2}x+2\}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

Gesucht:

a) Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der Abszissenachse.
b) Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse.
c) Graph der Funktion in
$D=\{x \mid -4 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$
$W=\{x \mid -1 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

a) $y_0=f(x_0)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0+2=0 \Leftrightarrow x_0=-4 \Rightarrow \underline{\underline{P_x(-4,0)}}$

b) $x=0 \Rightarrow y_0=f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0+2=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0,2)}}$

c)