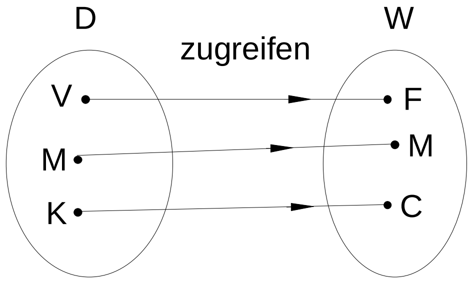
Der Funktionsbegriff

Eine halbe Stunde nach dem Start geht die Stewardess wieder mit einem Tablett herum und bietet Zeitschriften an.
Auf dem Tablett liegen eine Frankfurter Allgemeine Zeitung, ein Modejournal und ein Comicheft.

D = Definitionsmenge
W = Wertemenge

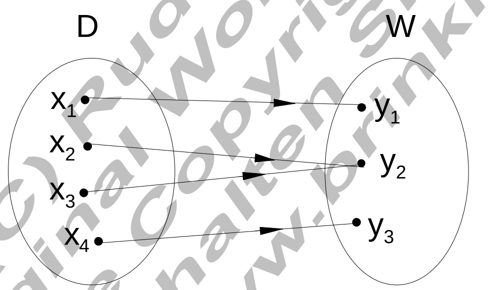


Der Vater greift zur FAZ
Die Mutter greift zum Modejournal
Das Kind greift zum Comicheft

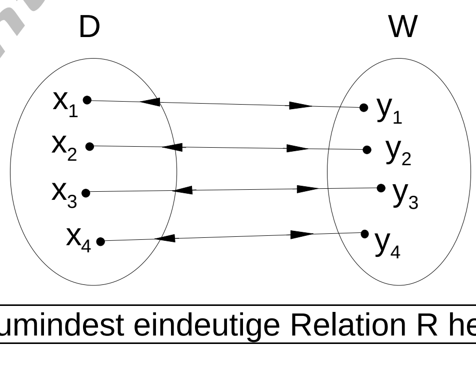
Auf diese Weise entsteht eine **eindeutige Relation** (Abbildung).

$R = \{(V,F);(M,M);(K,C);\}$

Definition	Eine Relation heißt eindeutig, wenn jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Wertemenge zugeordnet ist.



Definition	Eine Relation heißt eineindeutig, wenn die Zuordnung auch umkehrbar eindeutig ist, d.h. wenn jedem Element aus D genau ein Element aus W und jedem Element aus W genau ein Element aus D zugeordnet ist.



Definition	Eine zumindest eindeutige Relation R heißt Funktion f

$R = f = \{x,y \mid (x_1,y_1);(x_2,y_2);(x_3,y_2);(x_4,y_3);\}_{D \times W}$

Darstellungsarten von Funktionen

Mengenschreibweise: $f = \{x, y \mid y = f(x)\}_{D \times W}$

Die Funktion f ist die Menge aller geordneten Paare (x, y), für die die Funktionsgleichung y = f(x) gilt in der Grundmenge $D \times W$.

Zuordnungsschreibweise: $f : x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y$ in $D \times W$

Die Funktion f ist definiert als die Zuordnung: x wird zugeordnet einem f(x) mit der Funktionsgleichung f(x) = y in der Grundmenge
$D \times W$.

Im folgenden wird die abgekürzte Schreibweise bevorzugt.
Die Definitionsmenge D_f ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.

Beispiel:

$y = f(x) = 2x + 3 \qquad D_f = -2 \leq x \leq 2$

Das ist eine Funktion 1. Grades, da x nur in der ersten Potenz vorkommt.
$y = f(x) = ax + b$ (auch als lineare Funktion bekannt)
Die Wertetabelle:

Berechnung der Werte :

$x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$

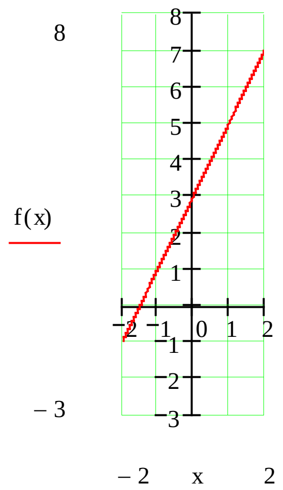
$x_3 = \quad 0 \Rightarrow y_3 = f(x_3) = f(0) = 2(0) + 3 = 3$

$x_4 = \quad 1 \Rightarrow y_4 = f(x_4) = f(1) = 2(1) + 3 = 5$

$x_5 = \quad 2 \Rightarrow y_5 = f(x_5) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$

x	-2	-1	0	2	
y = f(x)	-1	1	3	7	

Dieser Funktion ist im x-y Koordinatensystem ein Funktionsgraph zugeordnet:



Zu jedem x-Wert gehört genau ein Funktionswert y = f(x)
Umgekehrt gehört auch zu jedem y-Wert genau ein x-Wert.
Die Funktion ist eineindeutig.

Beispiel:

$y = f(x) = x^2 + x - 2 \quad D_f = -3 \le x \le 2$

Das ist eine Funktion 2. Grades, da die höchste Potenz von x 2 ist.
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (auch als quadratische Funktion bekannt)
Die Wertetabelle:

Berechnung der Werte :

$x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-3) = (-3)^2 + (-3) - 2 = 4$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

$x_3 = -1 \Rightarrow y_3 = f(x_3) = f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2$

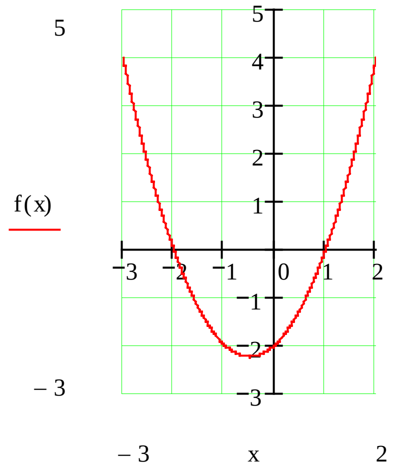
$x_4 = 0 \Rightarrow y_4 = f(x_4) = f(0) = (0)^2 + (0) - 2 = -2$

$x_5 = 1 \Rightarrow y_5 = f(x_5) = f(1) = (1)^2 + (1) - 2 = 0$

$x_6 = 2 \Rightarrow y_6 = f(x_6) = f(2) = (2)^2 + (2) - 2 = 4$

x	-3	-2	-1	0	2	
y = f(x)	4	0	-2	-2	4	

Dieser Funktion ist im x-y Koordinatensystem folgender Funktionsgraph zugeordnet:



Zu jedem x-Wert gehört genau ein Funktionswert y = f(x)
Die Umkehrung gilt hier nicht.
Die Funktion ist eindeutig aber nicht eineindeutig.
Für den Definitionsbereich $D_f : -3 \le x \le 2$ ist der zugehörige
Wertebereich $W_f : -1{,}25 \le f(x) \le 4$

Aufgabe: $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$ $\quad D_f = -1 \le x \le 7$

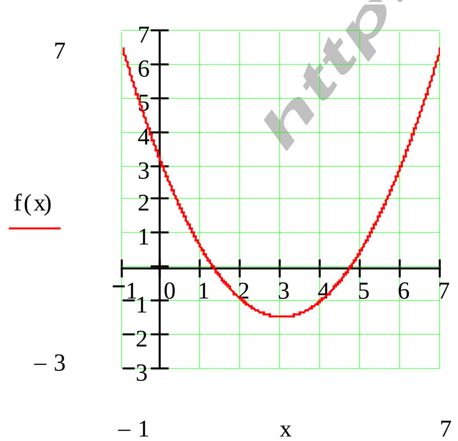
a) Stellen Sie eine Wertetabelle auf (Schrittweite für x ist 0,5)

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	6,5	4,625	3	1,625	0,5	-0,375	-1	-1,375	-1,5
x	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	
f(x)	-1,375	-1	-0,375	0,5	1,625	3	4,625	6,5	

b) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in ein x-y Koordinatensystem.

c) Lesen Sie folgende Koordinaten ab:
- Schnittpunkt mit der y-Achse (0|3)
- Schnittpunkte mit der x-Achse (1,268|0) (4,732|0)
- Zeichnen Sie den Punkt mit der kleinsten y-Koordinate ein und lesen Sie die Koordinaten ab (3|-1,5)

d) Bestimmen Sie den Wertebereich $W_f = -1{,}5 \le f(x) \le 6{,}5$



Hausufgabe: $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \qquad D_f = -1 \le x \le 7$

a) Stellen Sie eine Wertetabelle auf (Schrittweite für x ist 0,5)

b) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in ein x-y Koordinatensystem.

c) Lesen Sie folgende Koordinaten ab:
- Schnittpunkt mit der y-Achse
- Schnittpunkte mit der x-Achse
- Zeichnen Sie den Punkt mit der kleinsten y-Koordinate ein und lesen Sie die Koordinaten ab

d) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f