Zeichnerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Einführungsbeispiel:

Sorte A 6 DM/Liter

Sorte B 3 DM/Liter $\Rightarrow \quad 6 \underbrace{x}_{\text{Menge der Sorte A}} + 3 \underbrace{y}_{\text{Menge der Sorte B}} = 30$

Zusätzliche Bedingung:
Die Gesamtmenge der Mischung soll 8 Liter betragen

$$\Rightarrow \quad x + y = 8$$

logisches Zeichen für und: $\wedge$

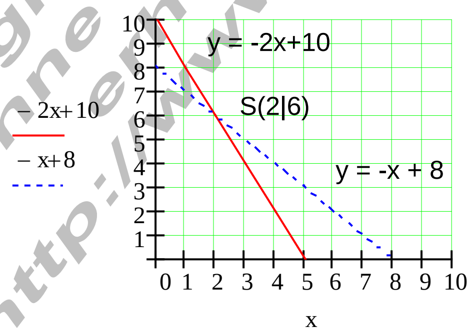
Insgesamt sollen 30 DM ausgegeben werden und zugleich soll die Gesamtmenge 8 Liter betragen.

$$\begin{aligned} & 6x + 3y = 30 \\ \wedge \quad & x + y = 8 \\ & \text{------------} \end{aligned}$$

Definition	Man erhält ein lineares Gleichungssystem, wenn man 2 lineare Gleichungen durch $\wedge$ verbindet: I $\quad a_1x + b_1y = c_1$ II $\wedge \; a_2x + b_2y = c_2$

Die Lösungsmenge soll grafisch ermittelt werden.

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 6x + 3y = 30 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 10 \\ &\text{II} \quad x + y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 8 \end{aligned}$$



Man erhält als Schnittpunkt der beiden Geraden den Punkt S(2|6).
Er ist der einzige Punkt, der auf Gerade I und zugleich auf Gerade II liegt.
Die Lösungsmenge Lautet also: L = { (2|6) }
Es müssen folglich 2 Liter der Sorte A und 6 Liter der Sorte B gemischt werden.
Dann sind beide Bedingungsgleichungen zugleich erfüllt.

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 6 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 30 \\ &\text{II} \quad 2 + \; 6 = 8 \end{aligned}$$

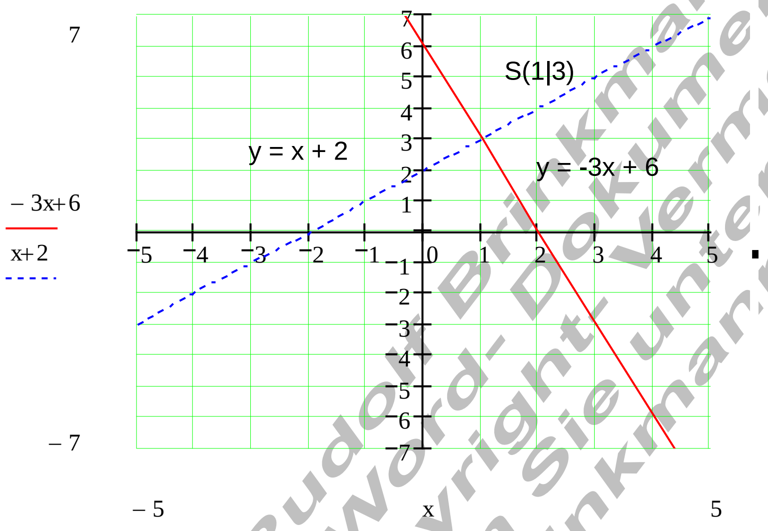
Vorgehensweise bei der Lösung Linearer Gleichungssysteme
(zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten)

Lösungsschritte:

1. Gleichungssystem äquivalent umformen nach $y = ax + b$

$$\begin{array}{lll} \text{I} \quad 3x + y = 6 & \Leftrightarrow & y = -3x + 6 \\ \text{II} \quad 2x - 2y = -4 & \Leftrightarrow & y = x + 2 \end{array}$$

2. Funktionsgeraden in ein Koordinatensystem eintragen



3. Schnittpunkt der Geraden bestimmen

Das Zahlenpaar (1|3) erfüllt beide Gleichungen.
Es ist das einzige Element der Lösungsmenge des Gleichungssystems.

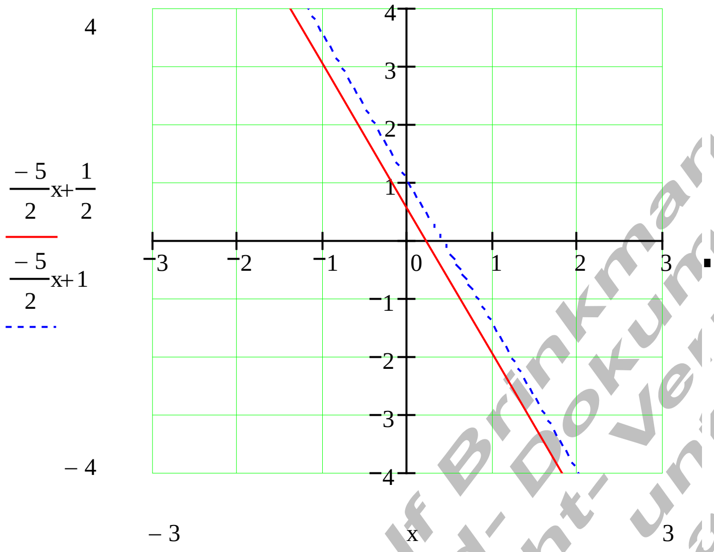
4. Lösungsmenge aufschreiben

$L = \{ (1|3) \}$

Gleichungssystem ohne Lösung

$$\text{I} \quad 5x + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{II} \quad 10x + 4y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{5}{2}x + 1$$



Es ergeben sich zwei Geraden mit derselben Steigung $(m = -\frac{5}{2})$,

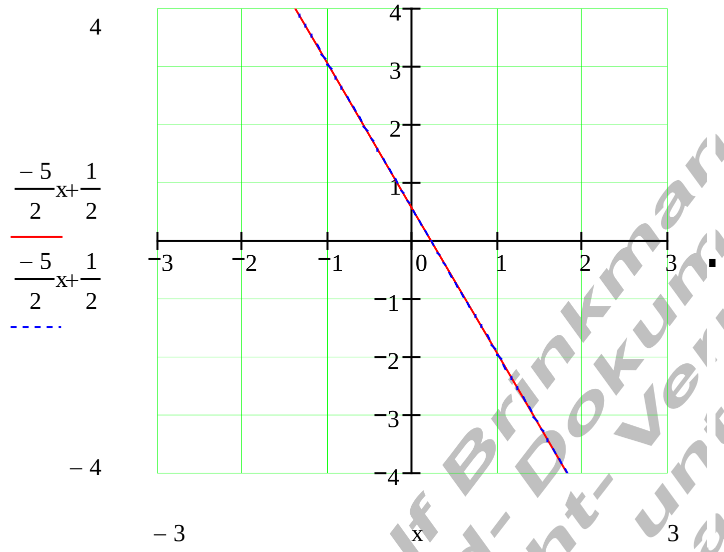
aber mit unterschiedlichen y – Abschnitten: $\frac{1}{2}$ bzw. 1.

Die Geraden verlaufen also parallel und schneiden sich nicht.
Folglich ist die Lösungsmenge leer: L = { }.

Gleichungssystem mit unterschiedlich vielen Lösungen

I $5x + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

II $10x + 4y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$



Die Gradengleichungen sind äquivalent.
Die Geraden liegen aufeinander.
Jedes Zahlenpaar, das I erfüllt, erfüllt zugleich auch II.
Die Lösungsmenge besteht also aus unendlich vielen Zahlenpaaren.

$$L = \{(x \mid y) \mid y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\}$$

Merke:	Zwischen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und den zugehörigen Geraden besteht folgender Zusammenhang: 1. Die Lösungsmenge besteht aus einem einzigen Zahlenpaar $\Leftrightarrow$ Die Geraden Schneiden sich. 2. Die Lösungsmenge ist leer $\Leftrightarrow$ Die Geraden verlaufen parallel. 3. Die Lösungsmenge besteht aus unendlich vielen Zahlenpaaren $\Leftrightarrow$ Die Geraden decken sich.

<u>Aufgaben:</u>

1. Bestimmen Sie graphisch die Lösungsmengen der Gleichungssysteme.

a) I $-2x+y=3$ b) I $2x-2y=4$ c) I $-4{,}5x-3y=-3{,}75$
II $2x+y=1$ II $2x+2y=12$ II $0{,}5x+y=-0{,}25$

d) I $-20x+10y=-10$ e) I $12x-4y=36$ f) I $12x-3y=0$
II $15x+15y=75$ II $15x+6y=12$ II $4x-y=1$

2. Bestimmen Sie zeichnerisch den Schnittpunkt der beiden Funktionen:

a) $y=\frac{3}{2}x-3$ und $y=-\frac{2}{3}x+4$ b) $y=2x+3$ und $y=-x-2$

c) $y=3x+2$ und $y=-x-3$ d) $y=\frac{3}{2}x+3$ und $y=-\frac{2}{5}x-4$

Lösung zu 1:

a) $L=\left\{\left(-\frac{1}{2},2\right)\right\}$ b) $L=\left\{\left(4,2\right)\right\}$ c) $L=\left\{\left(\frac{3}{2},-1\right)\right\}$

d) $L=\left\{\left(2,3\right)\right\}$ e) $L=\left\{\left(2,-3\right)\right\}$ f) $L=\left\{\ \right\}$

Lösung zu 2:

a) $S\left(\frac{42}{13},\frac{24}{13}\right)$ b) $S\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ c) $S\left(-\frac{5}{4},-\frac{7}{4}\right)$ d) $S\left(-\frac{70}{19},-\frac{48}{19}\right)$