Gebrochen rationale Funktionen (mit Parameter)

1. Gegeben sind Funktionen f_k durch $f_k(x) = \frac{2x}{\left(x^2+k\right)}$

a) Untersuche allgemein die Funktionen f_k.
Versuche, Typen des Graphen anzugeben.

b) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben alle Funktionen f_k

c) Berechne $\int_0^{\sqrt{k}} f_k(x)dx$ und gib dem Integralwert eine anschauliche Deutung.

Symmetrien:

$$f_k(1) = \frac{2\cdot 1}{\left(1^2+k\right)} = \frac{2}{1+k}$$

$$f_k(-1) = \frac{2\cdot(-1)}{\left((-1)^2+k\right)} = \frac{-2}{1+k} = -\frac{2}{1+k} = -f(1) \Rightarrow$$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^2+k}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x+\frac{k}{x}}\right) = +0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2+k}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x+\frac{k}{x}}\right) = -0$$

Koordinatenschnittpunkte:

Da Punktsymmetrie vorliegt, verläuft der Graph durch den Koordinatenursprung. $P(0\,|\,0)$ für $k \neq 0$. Weitere Nullstellen gibt es nicht.

(Für $k = 0$ geht die Funktion über in $f_0(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ wird später untersucht)

Vorzeichenbereiche:

Der Graph verläuft durch den 1. und 3. Quadranten und ist im 1. Quadranten positiv, im 2. Quadranten negativ.

Ableitungen:

$$f_k(x) = \frac{2x}{\left(x^2+k\right)}$$

$$f^{|}(x) = -2\frac{\left(x^2-k\right)}{\left(x^2+k\right)^2}$$ (abgeleitet nach der Quotientenregel) $\frac{u^{|}v-uv^{|}}{v^2}$

$$f^{||}(x) = 4x\frac{(x^2-3k)}{\left(x^2+k\right)^3}$$ (Quotientenregel und Kettenregel für Nenner)

$$v = \left(x^2+k\right)^2 \Rightarrow v^{|} = 2\left(x^2+k\right)\cdot 2x = 4x\left(x^2+k\right)$$ (Kettenregel für Nenner)

$$f^{|||}(x) = -12\frac{\left(x^4-6kx^2+k^2\right)}{\left(x^2+k\right)^4}$$

Extrema:

notwendige Bedingung: $f^{|}(x)=0 \Rightarrow$

$$-2\frac{\left(x^2-k\right)}{\left(x^2+k\right)^2} = 0 \Rightarrow \left(x^2-k\right) = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{k}}}$$ und $k > 0$

auch hinreichend wenn $f^{||}(\pm\sqrt{k}) \neq 0$

$$f^{||}(\sqrt{k}) = 4\sqrt{k}\frac{(k-3k)}{\left(k+k\right)^3} = 4\sqrt{k}\frac{(-2k)}{\left(2k\right)^3} = -8\sqrt{k}\frac{k}{8k^3} = \frac{-\sqrt{k}}{k^2} < 0 \Rightarrow$$ relatives Minimum

Wegen der Punktsymmetrie ist $f^{||}(-\sqrt{k}) > 0 \Rightarrow$ relatives Maximum

Koordinaten der Extrema: $P_{min}\left(-\sqrt{k} \mid -\frac{\sqrt{k}}{k}\right)$ und $P_{max}\left(\sqrt{k} \mid \frac{\sqrt{k}}{k}\right)$