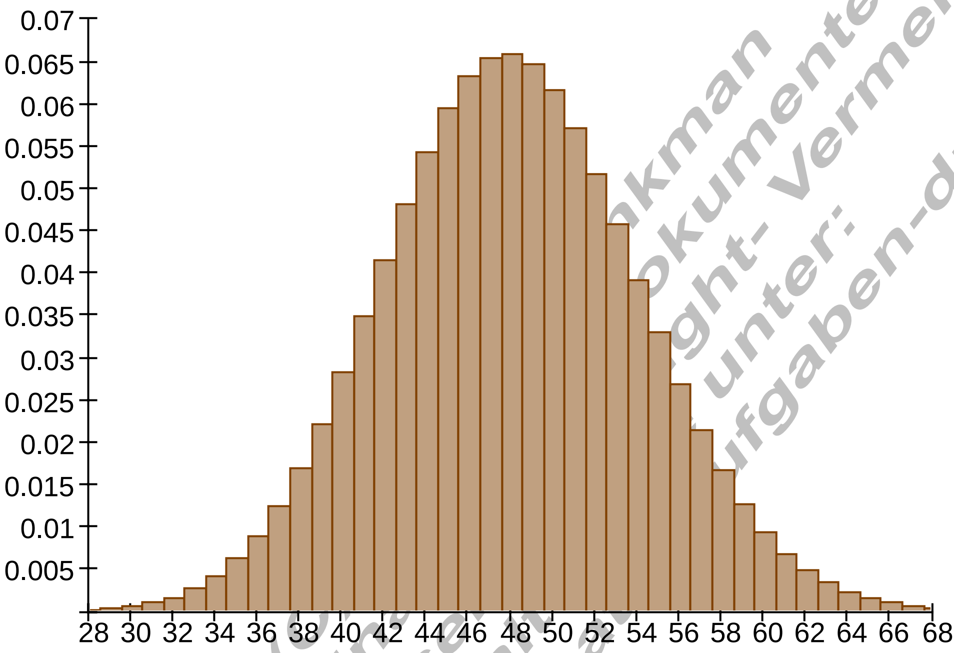
Wahrscheinlichkeiten von Umgebungen

Bei einer Binomialverteilung ist der Erwartungswert der mit der größten Wahrscheinlichkeit.
In der Umgebung des Erwartungswertes befinden sich die Anzahlen der Erfolge mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.
Je mehr die Anzahl der Erfolge sich vom Erwartungswert unterscheiden, desto geringer wird deren Wahrscheinlichkeit.
Wir interessieren uns zunächst für die nähere Umgebung des Erwartungswertes und die in diesem Bereich auftretenden Wahrscheinlichkeiten.
Folgende Verteilung soll als Beispiel dienen:



Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0{,}24$

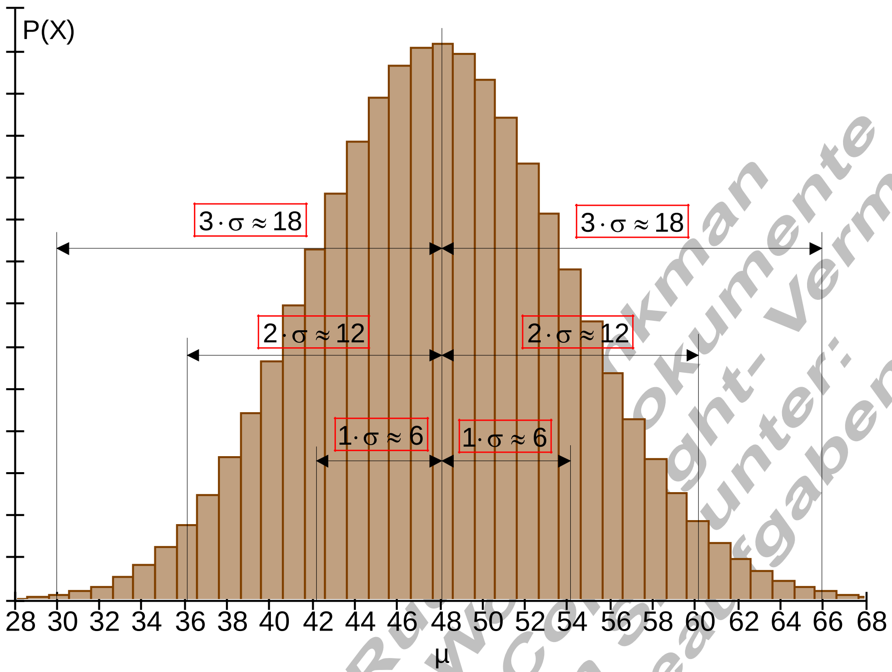
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}24 = \underline{\underline{48}}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}76} \approx \underline{\underline{6{,}04}}$

Wahrscheinlichkeit einer Sigma- Umgebung.

Um den Erwartungswert 48 werden drei Umgebungen eingezeichnet;
1. eine $\sigma -$Umgebung der Breite $\sigma \approx 6$
2. eine $2\sigma -$Umgebung der Breite $2\sigma \approx 12$
3. eine $3\sigma -$Umgebung der Breite $3\sigma \approx 18$

In diesen Bereichen ist die Wahrscheinlichkeit zu untersuchen.



Dazu benötigen wir zunächst eine kumulierte Wahrscheinlichkeitstabelle für den interessierenden Bereich.

Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
28	0,000	35	0,017	42	0,182	49	0,603	56	0,918	63	0,994
29	0,001	36	0,026	43	0,230	50	0,665	57	0,940	64	0,996
30	0,001	37	0,038	44	0,284	51	0,722	58	0,957	65	0,998
31	0,002	38	0,055	45	0,344	52	0,774	59	0,969	66	0,998
32	0,004	39	0,077	46	0,407	53	0,819	60	0,979	67	0,999
33	0,007	40	0,106	47	0,473	54	0,859	61	0,986	68	0,999
34	0,011	41	0,140	48	0,539	55	0,892	62	0,990	69	1,000

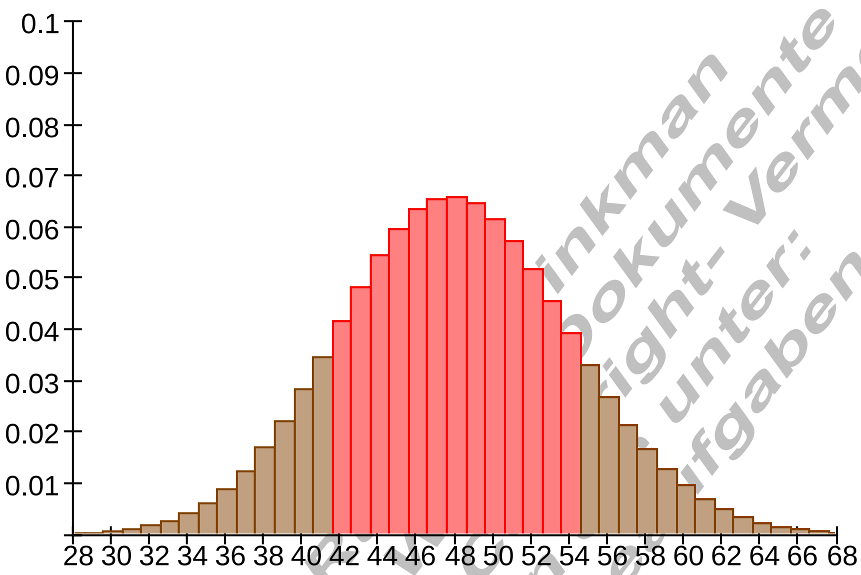
Wahrscheinlichkeit der einfachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - \sigma \approx 48 - 6 = 42$ und $\mu + \sigma \approx 48 + 6 = 54$ und damit

$P(42 \le X \le 54) = P(X \le 54) - P(X \le 41) = 0{,}859 - 0{,}140 = \underline{\underline{0{,}719}}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,719 (71,9%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [42 ; 54]. Das entspricht etwa der einfachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der einfachen σ – Umgebung $\approx 0{,}719$

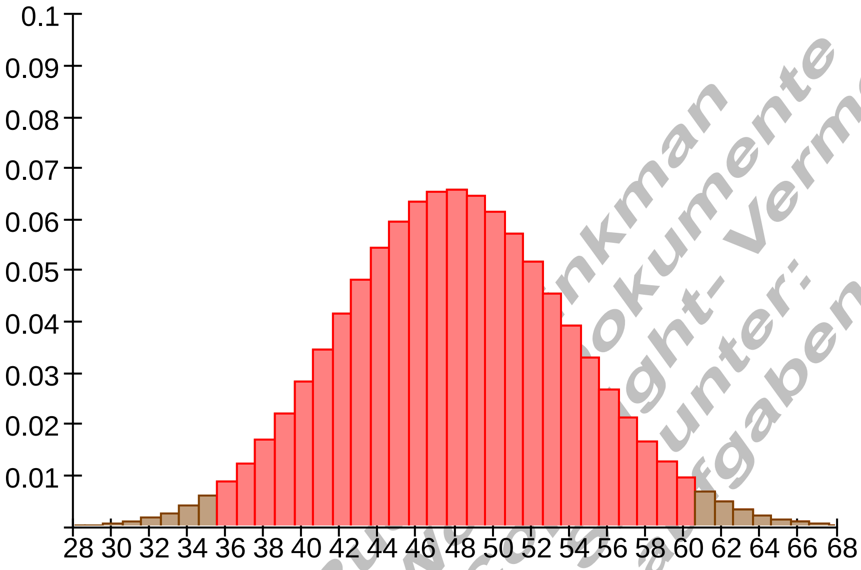
Wahrscheinlichkeit der doppelten Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P\left(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma\right)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 2\sigma \approx 48 - 12 = 36$ und $\mu + 2\sigma \approx 48 + 12 = 60$ und damit

$P\left(36 \leq X \leq 60\right) = P\left(X \leq 60\right) - P\left(X \leq 35\right) = 0{,}979 - 0{,}017 = \underline{\underline{0{,}962}}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,962 (96,2%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [36 ; 60]. Das entspricht etwa der doppelten Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der doppelten σ – Umgebung $\approx 0{,}962$

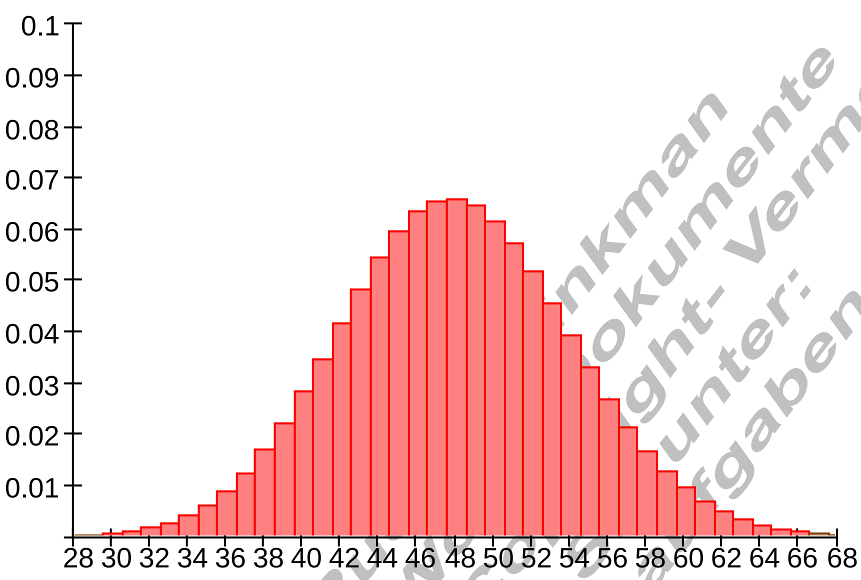
Wahrscheinlichkeit der dreifachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 3\sigma \approx 48 - 18 = 30$ und $\mu + 3\sigma \approx 48 + 18 = 66$ und damit

$P(30 \le X \le 66) = P(X \le 66) - P(X \le 29) = 0{,}998 - 0{,}001 = \underline{\underline{0{,}997}}$

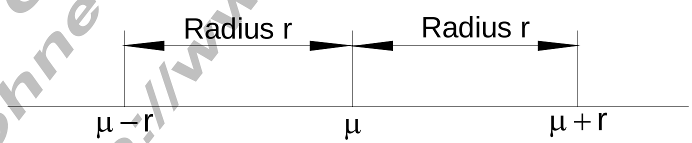
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,997 (99,7%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [30 ; 66]. Das entspricht etwa der dreifachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der dreifachen $\sigma -$Umgebung $\approx 0{,}997$

Umgebungsradius.

Der Umgebung des Erwartungswerts wird ein Radius zugeordnet. Darunter verstehen wir den beidseitigen Abstand vom Erwartungswert. Eine Grafik soll das erläutern.

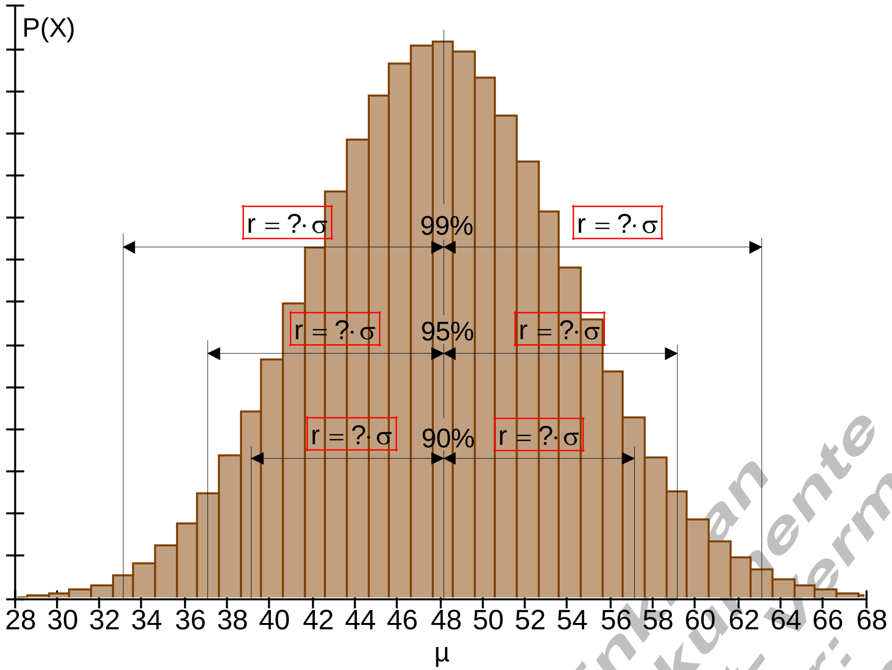


Jedem Umgebungsradius lässt sich eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen.

Im oben angeführten Beispiel gehört zu einer einfachen Sigma- Umgebung (r = 6) eine Umgebungswahrscheinlichkeit von etwa 0,719, zur doppelten Sigma- Umgebung (r = 12) eine von etwa 0,962 und zur dreifachen Sigma- Umgebung (r = 18) eine von etwa 0,997.

Umgekehrt gehört zu jeder Umgebungswahrscheinlichkeit ein bestimmter Radius.

Der Umgebungsradius bei fest vorgegebener Umgebungswahrscheinlichkeit (90%, 95%, 99%) lässt sich wie folgt bestimmen:



Liegt für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich das Problem durch Einschachtelung lösen. Für die zwei Sigma- Umgebung, (im obigen Beispiel r = 12), war die Umgebungswahrscheinlichkeit etwa 96,2%.

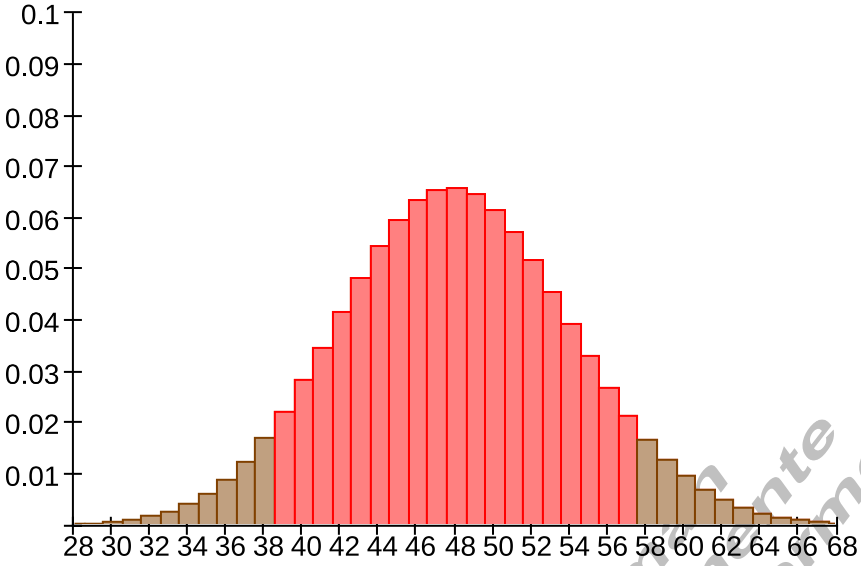
Für die 90% Wahrscheinlichkeit ist der Umgebungsradius geringer. Ansatz mit r = 10.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	10	$38 \le X \le 58$	$0{,}957 - 0{,}038 = 0{,}919$
48	9	$39 \le X \le 57$	$0{,}940 - 0{,}055 = 0{,}885$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 9 und 10. Da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, muss man sich für den Radius entscheiden, der der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten liegt. In diesem Fall ist das der Radius r = 9. Teilt man diesen Wert durch Sigma, dann lässt sich der Radius als vielfaches von Sigma darstellen.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{9}{6{,}04} \approx 1{,}49 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}49\,\sigma}}$$

In einer $1{,}49\,\sigma$ Umgebung liegen etwa 88,5% aller Erfolge.



Radius der 90% – Umgebung $r \approx 9 \approx 1{,}49 \cdot \sigma$ $P(\mu - 9 \le X \le \mu + 9) \approx 0{,}885$

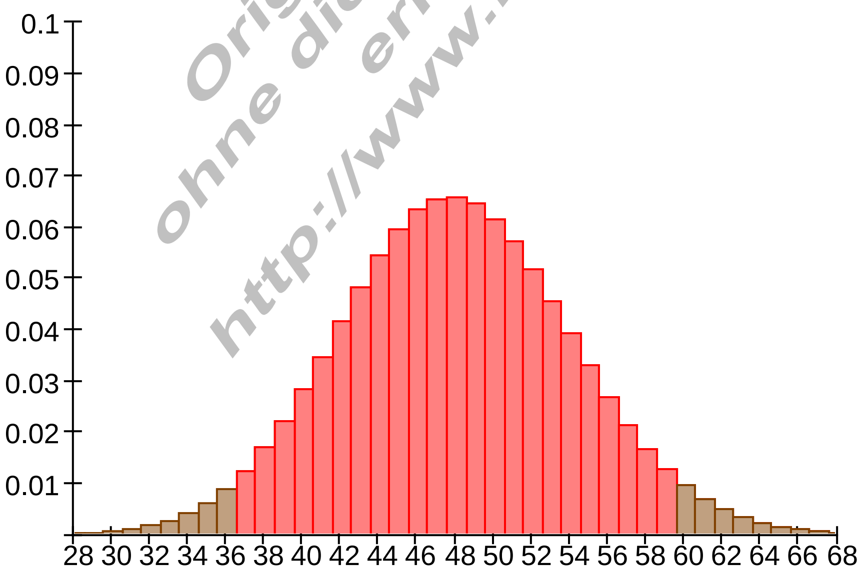
Für die 95% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 12 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	12	$36 \le X \le 60$	$0{,}979 - 0{,}017 = 0{,}962$
48	11	$37 \le X \le 59$	$0{,}969 - 0{,}026 = 0{,}943$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 11 und 12.
Der Radius r = 11 liegt der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{11}{6{,}04} \approx 1{,}82 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}82\sigma}}$$

In einer $1{,}82\sigma$ Umgebung liegen etwa 94,3% aller Erfolge.



Radius der 95% – Umgebung $r \approx 11 \approx 1{,}82 \cdot \sigma$ $P(\mu - 11 \le X \le \mu + 11) \approx 0{,}943$

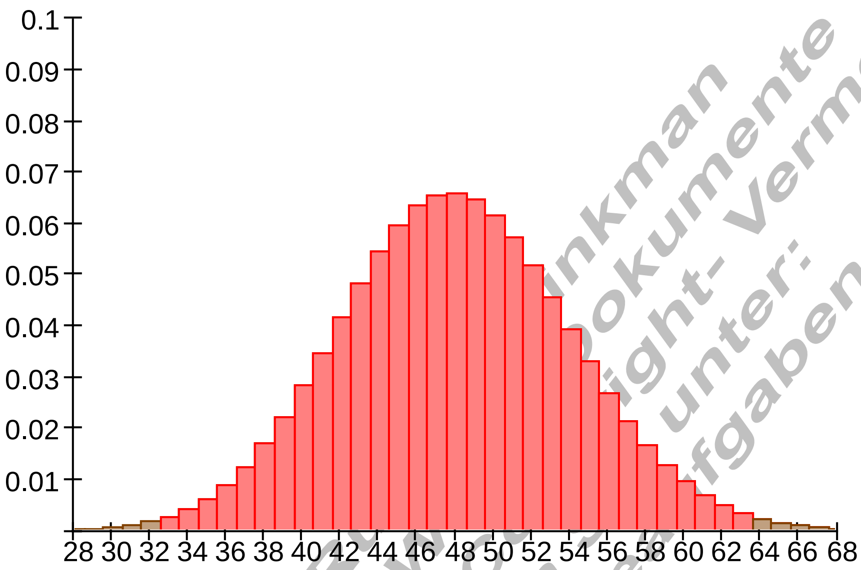
Für die 99% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 14 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	14	$34 \le X \le 62$	$0,990 - 0,007 = 0,983$
48	15	$33 \le X \le 63$	$0,994 - 0,004 = 0,99$

Der gesuchte Radius hat den Wert r = 15

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{15}{6,04} \approx 2,48 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 2,48\sigma}}$$

In einer 2,48σ Umgebung liegen etwa 99% aller Erfolge.



Radius der 99% – Umgebung $r \approx 15 \approx 2,48 \cdot \sigma$ $P(\mu - 15 \le X \le \mu + 15) \approx 0,99$