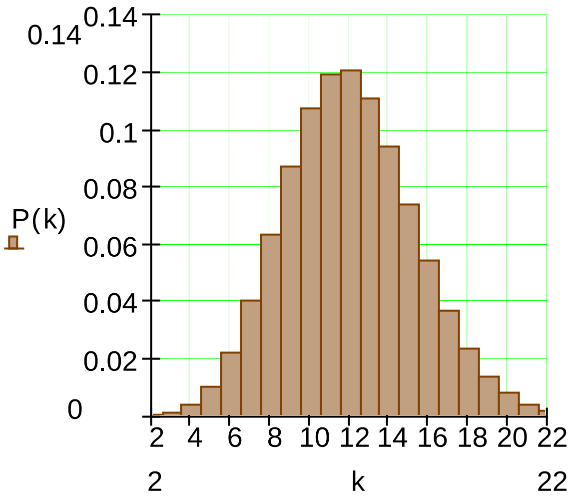
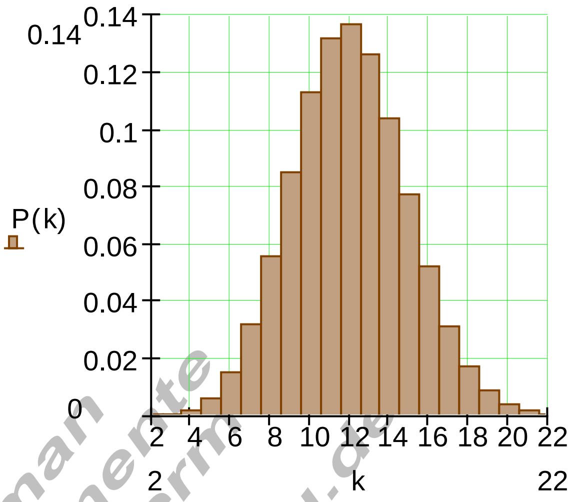
Varianz und Standardabweichung einer binomial verteilten Zufallsgröße



Binomialverteilung für n = 120 und p = 0,1



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,3

Beide Binomialverteilungen haben den gleichen Erwartungswert.

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{12}}$ $\qquad$ $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{12}}$

Obwohl beide Verteilungen den gleichen Erwartungswert haben sehen sie unterschiedlich aus. Wir untersuchen die Streuung um den Erwartungswert.
Aus der beschreibenden Statistik ist die Varianz, bzw. die Standardabweichung als Streumaß bekannt.
Der Ausdruck

$$s^2 = h(x_1)\cdot\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + h(x_2)\cdot\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + h(x_3)\cdot\left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + h(x_n)\cdot\left(x_n - \overline{x}\right)^2$$

wurde als Varianz einer Stichprobe bezeichnet.
Die Werte $h(x_1);h(x_2);h(x_3);\ldots;h(x_n)$ stellen relative Häufigkeiten dar.
Für die Standardabweichung galt $s = \sqrt{s^2}$

Analog hierzu definieren wir für Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Varianz und Standard-abweichung:	Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte $x_1;x_2;x_3;x_4;\ldots;x_n$ annehmen kann und den Erwartungswert μ hat, so heißt $V(x) = P(X = x_1)\cdot(x_1-\mu)^2 + P(X = x_2)\cdot(x_2-\mu)^2 + \ldots + P(X = x_n)\cdot(x_n-\mu)^2$ die Varianz der Zufallsvariablen X. Die Quadratwurzel aus der Varianz einer Zufallsgröße heißt Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(x)}$

Speziell für Binomialverteilungen gilt:

Varianz und Standardabweichung für Binomialverteilungen:	Bei einem $n-$stufigen Bernoulli $-$ Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$ und der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge gilt für die Varianz: $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$ und für die Standardabweichung: $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Der Beweis soll an dieser Stelle nicht geführt werden.

Für die oben abgebildeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

Binomialverteilung für $n=120$ und $p=0{,}1$

Erwartungswert:

$\mu=n\cdot p=120\cdot 0{,}1=\underline{\underline{12}}$

Standardabweichung:

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{120\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}\approx\underline{\underline{3{,}286}}$

Binomialverteilung für $n=40$ und $p=0{,}3$

Erwartungswert:

$\mu=n\cdot p=40\cdot 0{,}3=\underline{\underline{12}}$

Standardabweichung:

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{40\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}\approx\underline{\underline{2{,}898}}$

Bei der ersten Verteilung ist die Streuung etwas größer als bei der zweiten.