Wahrscheinlichkeit bei verknüpften Ereignissen

Bislang wurden nur Wahrscheinlichkeiten einzelner Ereignisse berechnet.
Ereignisse können aber auch verknüpft werden.

In einem Abiturjahrgang am Berufskolleg sind 100 Schüler/innen, davon haben 87 Spanisch (S) und 75 Französisch (F) gelernt, 70 beherrschen beide Fremdsprachen.

a) Wie viele Schüler/innen lernten Französisch oder Spanisch?
(oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides)

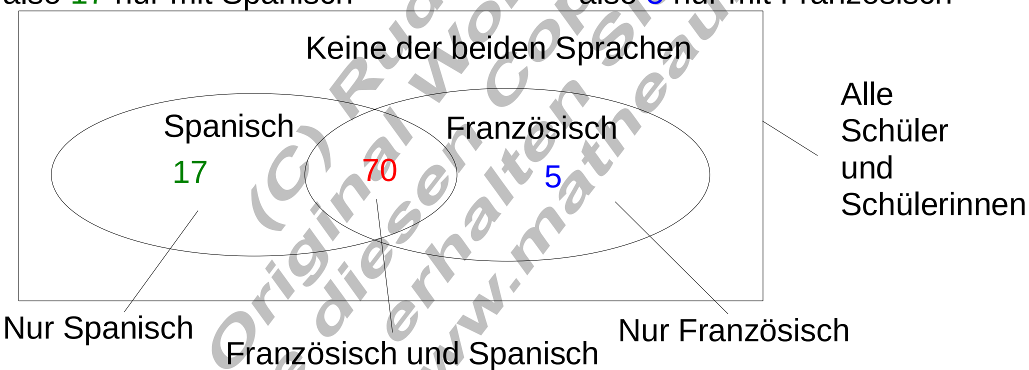
b) Ein Schüler/in wird zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er/sie Spanisch oder Französisch gelernt hat.
(oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides)

<u>Lösung:</u>

a) Man kann nun nicht einfach die Zahlen für Spanisch und Französisch addieren, denn dann käme man auf eine Schülerzahl von 87 + 75 = 162. Das ist deshalb falsch, weil man die Schüler/innen die Spanisch und Französisch gelernt haben damit doppelt zählt.

87 Schüler/innen mit Spanisch
davon 70 mit Spanisch und Französisch,
also 17 nur mit Spanisch

75 Schüler/innen mit Französisch
davon 70 mit Spanisch und Französisch,
also 5 nur mit Französisch



Die 70 Schüler/innen mit Spanisch und Französisch sind sowohl in den 87 mit Spanisch als auch in den 75 mit Französisch enthalten. Addiert man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch (87) und die Anzahl der Schüler/innen mit Französisch (75), so hat man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch und Französisch doppelt gezählt. Daher muss man 70 von der Summe (162) subtrahieren.

Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch oder Französisch
$87+75-70=92$ bzw. $17+70+5=92$

Das bedeutet, 8 Schüler/innen lernten in der Gymnasialen Oberstufe keine der beiden Fremdsprachen (Spracherfüller in Sek I).

b) Zuerst definieren wir die Ereignisse wie folgt:

S : Schüler/in hatte Spanisch F : Schüler/in hatte Französisch

Wahrscheinlichkeit: $P(S\,\text{oder}\,F) = \frac{87+75-70}{100} = 0{,}92$

mit Termumformung: $P(S\,\text{oder}\,F) = \underbrace{\frac{87}{100}}_{P(S)} + \underbrace{\frac{75}{100}}_{P(F)} - \underbrace{\frac{70}{100}}_{P(S\,\text{und}\,F)} = 0{,}87 + 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}92$

Aus diesem Beispiel erkennen wir die Summenregel, auch Additionsregel genannt.

Summenregel (Additionsregel)	Setzt sich ein Ereignis E aus den Ereignissen A und B zusammen, die sich überschneiden können, d.h. gemeinsame Ergebnisse enthalten können wie bei einer oder – Verknüpfung, dann muss man darauf achten, dass diese gemeinsamen Ereignisse nicht doppelt berücksichtigt werden. Sind A und B Ereignisse, und gilt $E = A \cup B$ (Oder - Ereignis), dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ In Worten: Die Wahrscheinlichkeit eines Oder – Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Und – Ereignisses.

Beispiel:
Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.
A: Die Augenzahl ist größer als 3 B: Die Augenzahl ist eine gerade Zahl
Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:
C: Die Augenzahl ist größer als 3 **oder** die Augenzahl ist eine gerade Zahl.
Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P (C).

Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$A = \{4;5;6\} \quad B = \{2;4;6\}$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $A \cap B = \{4;6\}$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses lässt sich leicht dadurch überprüfen, indem man die Ergebnismenge von $C = A \cup B$ bildet und deren Wahrscheinlichkeit bestimmt.

$$C = A \cup B = \{2;4;5;6\} \Rightarrow P(C) = P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Übung: Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.
A: Die Augenzahl ist größer als 4
B: Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1
Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:
C: Die Augenzahl ist größer als 4 **oder** Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1.
Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P (C).

Lösung: Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$A = \{5;6\} \quad B = \{3;5\}$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $\quad A \cap B = \{5\}$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Beispiel:
Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.
A: Die Augenzahl ist kleiner als 4   B: Die Augenzahl ist 4 oder 5
Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:
C: Die Augenzahl ist kleiner als 4 **oder** die Augenzahl ist 4 oder 5.
Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P (C).

Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$A = \{1;2;3\} \quad B = \{4;5\}$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Bemerkung:

Ist $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$ dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Übung: Eine Karte wird aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen (Skat).
Welche Wahrscheinlichkeit hat das folgende Ereignis?
E: Die gezogene Karte ist eine Bildkarte oder eine Kreuzkarte.

Lösung: Das Ereignis E ist eine Oder - Verknüpfung aus den Ereignissen
A: Die gesuchte Karte ist eine Bildkarte
B: Die gesuchte Karte ist eine Kreuzkarte
Zuerst bestimmen wir die Anzahl der möglichen Ergebnisse von A und B.
A: Es gibt 12 Bildkarten von insgesamt 32 Karten.
B: Es gibt 8 Kreuzkarten von insgesamt 32 Karten.
Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.
Dazu benötigen wir noch die Anzahl der möglichen Ergebnisse von $A \cap B$.
$A \cap B$: Es gibt 3 Kreuz - Bildkarten (Bube, Dame, König)
Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{12}{32} \quad P(B) = \frac{8}{32} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{32}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \underline{\underline{\frac{17}{32}}}$$

Zusammenfassung der bisher bekannten Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	S sei die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments. 1. Für alle Ereignisse E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$ wobei $P(\varnothing) = 0$ und $P(S) = 1$ ist. Das bedeutet, die Wahrschinlichkeit für das eintreten eines Ereignisses liegt immer zwischen 0 und 1 und kann nicht negativ sein. 2. Ist $E = \{e_1; e_2; ... e_n\}$, dann gilt: $P(E) = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n)$ (Beispiel Würfel) 3. Für alle Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 4. Für alle Ereignisse C gilt: $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$ (Ereignis und Gegenereignis ergänzen sich zu 1)