Ableitungen der e- Funktion mit Produkt- und Kettenregel

Ableitung der e – Funktion (heuristisch)

Die Ableitung der e - Funktion ist mit einfachen Mitteln nicht zu machen, dazu bedarf es schon etwas "höherer Mathematik".
Hier soll eine anschauliche Methode dargestellt werden, auch auf die Gefahr hin, das die Mathematikexperten meutern werden.

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

Wir berücksichtigen das gilt: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wir untersuchen das Verhalten von $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ für immer kleiner werdende Δx – Werte.

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

Aufgrund dieses Verhaltens folgern wir das gilt: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

Das bedeutet für unsere Rechnung:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

Ersetzt man x_0 durch x, so gilt: $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$

> Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = e^x$
> Die Exponentialfunktion zur Basis e ist eine Funktion,
> bei der Funktion und Ableitungsfunktion gleich sind.
> Die e – Funktion reproduziert sich bei der Ableitung.

Grundregeln zum Ableiten von e- Funktionen

Spiegelungen, Streckungen und Verschiebungen der e- Funktion führen dazu, dass der Exponent nicht mehr nur die Variable x enthält.
Verknüpfungen mit anderen Funktionen lassen neue Funktionen entstehen, in denen die e- Funktion als Faktor enthalten ist. In solchen Fällen sind für die Ableitungen weitere Regeln erforderlich.

Die Verschiebung der e- Funktion um 3 EH in positive x- Richtung und eine Steckung in x- Richtung mit dem Faktor 2 bewirkt eine Verkettung zweier Funktionen.

$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)}$ mit $u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$ stellt eine verkettete Funktion dar.
Deren Ableitung geschieht mit der

Kettenregel: $\boxed{f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}}}$$

Betrachten wir die Verknüpfung einer e- Funktion mit einer linearen Funktion:

$f(x) = (2x-1) \cdot e^x$ dann ist diese mit der Produktregel abzuleiten.

Produktregel: $\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

$u(x) = (2x-1) \Rightarrow u'(x) = 2$ und $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x = \left[2 + (2x-1)\right] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x+1) \cdot e^x}}$$

Beispiele zu diesen Regeln:

(1) $f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$

(2) $f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$

(3) $f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$

mit $u = (x-2) \Rightarrow u' = 1$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$ wird

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x-2) \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$= \left[1 - (x-2)\right] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3-x) \cdot e^{-x}}}$$

(4) $f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

mit $u = ax \Rightarrow u' = a$ und $v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ wird

$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$= a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

Mehrfachableitungen
Im Zusammenhang mit Kurvendiskussionen sind oft drei Ableitungen der zu untersuchenden Funktion erforderlich.

$f(x) = (2x+4)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ (Produkt aus einer linearen – und einer e – Funktion)

mit $u = (2x+4) \Rightarrow u' = 2$ und $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ wird

$$f'(x) = u'v + uv' = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[2 + (2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

mit $u = -x \Rightarrow u' = -1$ und $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ wird

$$f''(x) = u'v + uv' = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

mit $u = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}$ und $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ wird

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

Bei jeder Ableitung bleibt der e- Funktionsfaktor unverändert. Klammert man ihn aus, so ist die weitere Ableitung einfacher zu bewerkstelligen. Die Nullstelle der Ableitungsfunktion kann oft einfach abgelesen werden.

Training EFKT_02:

Ableiten von e- Funktionen.
Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

1.	$f(x) = 4\cdot e^{2x}$	2.	$f(x) = e^{x+4}$
3.	$f(x) = 2\cdot e^{2-4x}$	4.	$f(x) = 4x - 2\cdot e^{-2x}$
5.	$f(x) = x\cdot e^{-2x}$	6.	$f(x) = 2x\cdot e^{2-x}$
7.	$f(x) = (x+2)\cdot e^{x}$	8.	$f(x) = (1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$
9.	$f(x) = (1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$	10.	$f(x) = t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$