Betrachtungen zur e – Funktion und uneigentliche Integrale

Entwicklung der natürlichen Zahl e mit Hilfe der Zinseszinsrechnung.

Kapitalverzinsung nach einem Jahr mit einem Prozentsatz von p = 100% = 1

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0(1+p) = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **halbjähriger** Verzinsung mit $p = \frac{1}{2}$

$$K_2 = K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}25}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **monatlicher** Verzinsung mit $p = \frac{1}{12}$

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}61...}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **täglicher** Verzinsung mit $p = \frac{1}{360}$

$$K_{360} = K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}7145...}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **stündlicher** Verzinsung mit $p = \frac{1}{8640}$

$$K_{8640} = K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2{,}7181...}_{\approx e}}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **n** Verzinsungen

$$K_n = K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Verzinst man in jedem Moment (also unendlich viele Verzinsungen $n \to \infty$)
dann erhält man nach einem Jahr ein Kapital von:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

d.h. das Kapital hat sich mit dem Faktor **e** vervielfacht.

Die meisten Taschenrechner haben eine e – Funktionstaste, ähnlich wie die pi – Taste.
Der Zahlenwert der Eulerschen Zahl ist ein unendlich nicht periodischer Dezimalbruch.
Die Zahl e bildet die Basis der Exponentialfunktion.

Es gilt: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Die e – Funktion hat die Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

Der Wert von e auf 3 Stellen gerundet: e = 2,718
Der Wert von e auf 9 Stellen gerundet e = 2,718 281 828

Betrachtungen zur e – Funktion

Normale e – Funktion

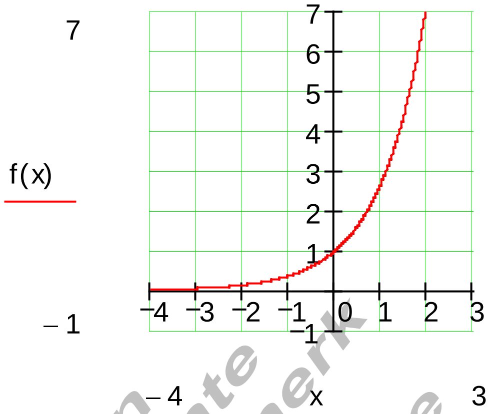
$f(x) = e^x$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$



Gespiegelt an der y – Achse

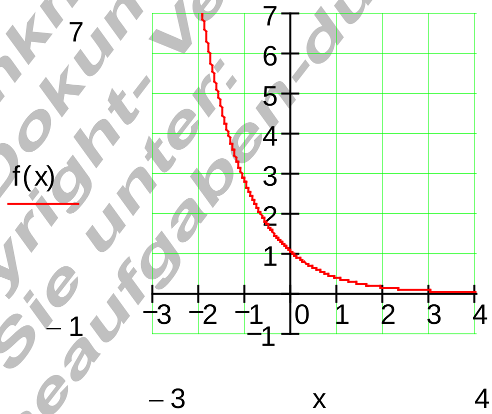
$f(x) = e^{-x}$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$



Verschoben um 1 EH nach unten

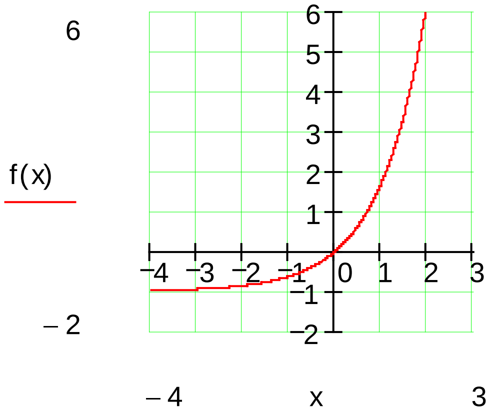
$f(x) = e^x - 1$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - 1\right) = -1 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x - 1\right) = \infty$



Gespiegelt an der y – Achse und verschoben um eine Einheit nach rechts

$f(x) = e^{-(x-1)}$

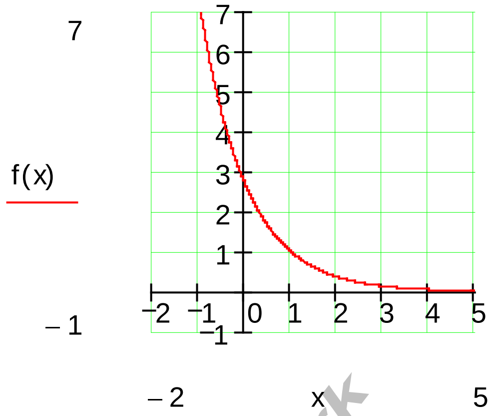
Schnittpunkt mit der y – Achse

$f(0) = e^{-(0-1)} = e^{1} = e \Rightarrow P_y(0\,|\,e)$

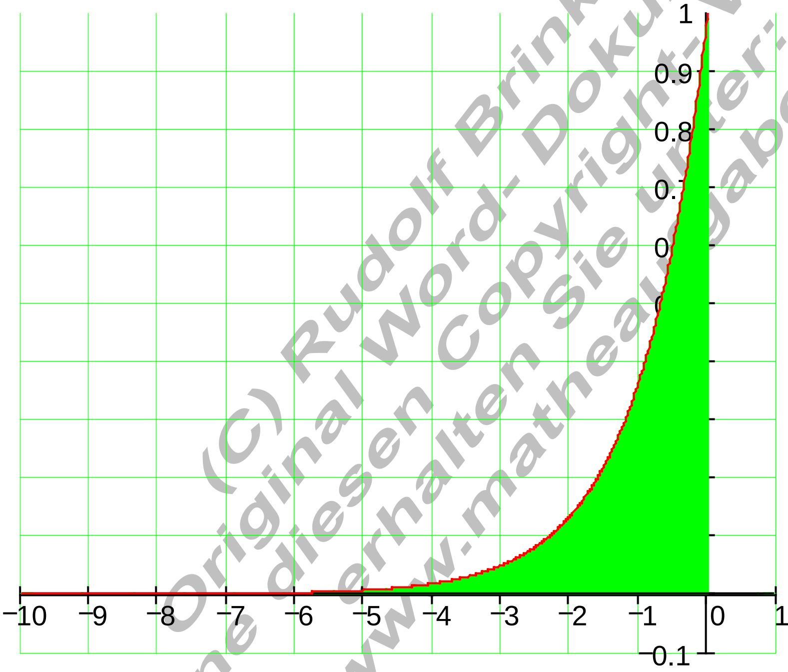
$f(1) = e^{-(1-1)} = e^{0} = 1 \Rightarrow P(1|1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-(x-1)} = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} e^{-(x-1)} = 0$



Uneigentliche Integrale



Die gesamte Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = e^{x}$ und der x – Achse soll im Intervall $(-\infty\,;0]$ berechnet werden, also $A = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$

Bisher waren untere bzw. obere Grenze eines bestimmten Integrals Zahlen.
Der Integrationsbereich war also begrenzt.
Nun ist der Integrationsbereich nicht mehr begrenzt.
Ein solches Integral nennt man **Uneigentliches Integral** mit unbeschränktem Integrationsbereich.
Diese Integrale können in einer der drei Formen vorkommen.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Um solche Integrale zu berechnen geht man wie folgt vor:

Zunächst berechnet man das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für ein endliches Intervall $[a\,;b]$

dann bildet man von dem entsprechenden Ausdruck den Grenzwert

für $a \to -\infty$ oder $a \to \infty$ bzw. $b \to -\infty$ oder $b \to \infty$

Formal sieht das wie folgt aus:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

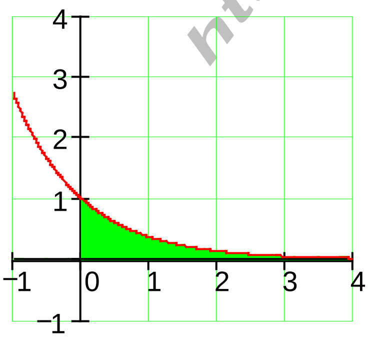
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Für unsere Flächenberechnung sieht das wie folgt aus:

$f(x) = e^x$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$



Die an der y – Achse gespiegelte e – Funktion mit $f(x) = e^{-x}$ sollte die gleiche Fläche im Intervall $[0\,;\infty)$ besitzen.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

Substitution: $u(x) = -x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-1}$

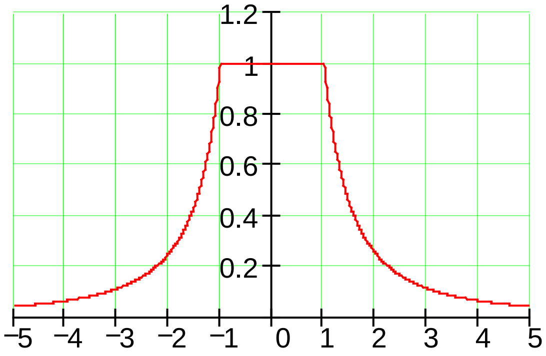
$$u(0) = 0\,;u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty} \int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[e^u\right]_{-b}^0 = \lim_{b\to\infty} \left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

Beispiel einer zusammengesetzten Funktion



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Integralaufteilung:

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Vorüberlegung:

Aus Symmetriegründen ist $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

so dass dieses Integral nur einmal berechnet werden muss.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$