Integration durch Substitution

Bisher haben wir nur Integrationsaufgaben gelöst, die sich auf Ableitungen von Elementarfunktionen zurückführen ließen. Die sich daraus ergebenden Grundintegrale bildeten die Basis aller weiteren Lösungsansätze.
Die direkte Anwendung der Grundintegrale ist nicht immer möglich, wie folgendes Beispiel zeigt.

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C$

denn $F'(x) = e^x = f(x)$

aber

$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx \neq e^{2x} + C$

denn $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$ falls $F(x) = e^{2x} + C$ wäre

In solchen Fällen hilft die Methode der Substitution.

$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$

Substitution: $u(x) = 2x = u$ bilde $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\int f(x)\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C$

Zurücksubstitution: $\frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ also: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x} + C}}$

Probe: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

Beispiel

$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$

Substitution: $u(x) = x + 1 = u$

bilde $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$

Zurücksubstitution: $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

also: $\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \underline{\underline{\frac{(x+1)^3}{3} + C}}$

Beispiel

$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$

Substitution: $u(x) = 3x + 6 = u$

bilde $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$

Zurücksubstitution: $\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

also: $\int (x)dx = \int (3x+6)^3\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{12}(3x+6)^4 + C}}$

Beispiel

$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$

Substitution: $u(x) = x^2 = u$

bilde $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$

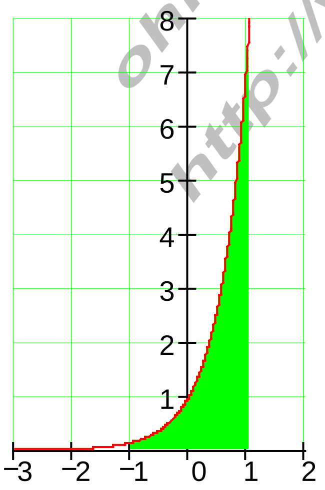
Zurücksubstitution: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

also: $\int (x)dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

Auch bestimmte Integrale lassen sich durch die Methode der Substitution lösen.

Beispiel

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$

Lösung des Integrals durch Substitution

1. Substitution $u(x) = 2x$

2. dx ersetzen $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

3. Substitution der Grenzen

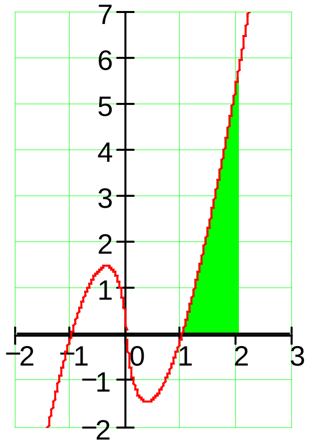
- untere Grenze: $u(-1) = -2$
- obere Grenze: $u(1) = 2$

4. In das Integral einsetzen

$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3{,}627}}$

Beispiel

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right)\, dx$$

Lösung des Integrals durch Substitution

1. Substitution $\quad u(x) = x^2$

2. dx ersetzen $\quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

3. Substitution der Grenzen

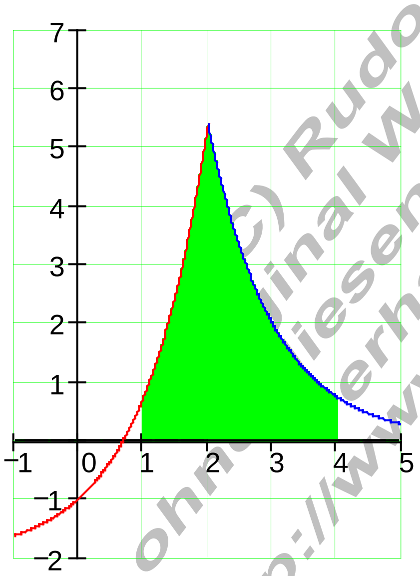
- untere Grenze: $\quad u(1) = 1$
- obere Grenze: $\quad u(2) = 4$

4. In das Integral einsetzen

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2{,}545}}$$

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & \text{für } x < 2 \\ \left(e^2 - 2\right) e^{-(x-2)} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 \left(e^2 - 2\right) e^{-(x-2)}\, dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = \left(e^2 - 2\right) \int_2^4 e^{-(x-2)}\, dx$$

$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du\, ;\, u(2) = 0\, ;\, u(4) = -2$$

$$I_2 = -\left(e^2 - 2\right) \int_0^{-2} e^u\, du = \left(e^2 - 2\right) \int_{-2}^0 e^u\, du$$

$$= \left(e^2 - 2\right) \cdot \left[e^u\right]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$

Training DIFF_INT_03:

Integration durch einfache Substitution
Lösen, bzw. berechnen Sie folgende Integrale.

1.	$\int \frac{3}{4x+1}\,dx$	2.	$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$
3.	$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$	4.	$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$
5.	$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$	6.	$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$
7.	$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$	8.	$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$
9.	$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$	10.	$\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$