Ableitung- und Integrale elementarer Funktionen

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$F(x)=k\cdot x+C$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$	$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C \quad (a>0, a\neq 1)$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=x\cdot\ln(x)-x+C \quad (x>0)$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$F(x)=\sin(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C \quad (x\neq 0)$

Gegenüberstellung von Differentations- und Integrationsregeln

Konstantenregel	
$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x)=k\cdot u'(x)$	$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\int f(x)\,dx=\int k\cdot u(x)\,dx=k\cdot\int u(x)\,dx$
Beispiel: $f(x)=3x^4 \quad k=3 \quad u(x)=x^4$ $\Rightarrow u'(x)=4x^3$ $f'(x)=k\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$	Beispiel: $f(x)=3x^2 \Rightarrow k=3 \quad u(x)=x^2$ $\int f(x)\,dx=3\cdot\int u(x)\,dx=3\cdot\int x^2\,dx$ $=3\cdot\frac{x^3}{3}+C=\underline{\underline{x^3+C}}$

Summenregel	
$f(x)=u(x)\pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$	$f(x)=u(x)\pm v(x)$ $\int f(x)\,dx=\int u(x)\,dx\pm\int v(x)\,dx$
Beispiel: $f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$ $\Rightarrow u'(x)=10x \quad v'(x)=3$ $f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$	Beispiel: $f(x)=x^2+x+1$ $\int f(x)dx=\int x^2\,dx+\int x\,dx+\int 1\,dx$ $=\underline{\underline{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C}}$

Weitere Regeln für die Differentialrechnung

Produktregel:	$f(x)=u(x)\cdot v(x) \Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$
Beispiel:	$f(x)=x\cdot e^x$ mit $u(x)=x$ und $v(x)=e^x$ $f'=u'\cdot v+u\cdot v'$ $u'(x)=1;\, v'(x)=e^x$ $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=\underline{\underline{(x+1)e^x}}$
Quotientenregel:	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$
Beispiel:	$f(x)=\frac{e^x}{x}$ mit $u(x)=e^x$ und $v(x)=x$ $f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $u'(x)=e^x;\, v'(x)=1;\, v^2=x^2$ $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{(x-1)e^x}{x^2}}}$
Kettenregel:	$f(x)=f[z(x)] \Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$
Beispiel:	$f(x)=e^{2x}$ mit $z=2x$ folgt $f(z)=e^z$ $f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$ $f'(z)=e^z;\, z'(x)=2 \Rightarrow f'(x)=e^z\cdot 2=\underline{\underline{2\cdot e^{2x}}}$

Training Diff_Int02:

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel
Differenzieren Sie folgende Funktionen mit den Ihnen bekannten Regeln.

1.	$f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$	2.	$f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$
3.	$f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$	4.	$f(x)=(x+1)e^x$
5.	$f(x)=(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$	6.	$f(x)=a(x-3)e^{4x-3}$
7.	$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$	8.	$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$
9.	$f(x)=\frac{x}{x-1}$	10.	$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-4\right)$

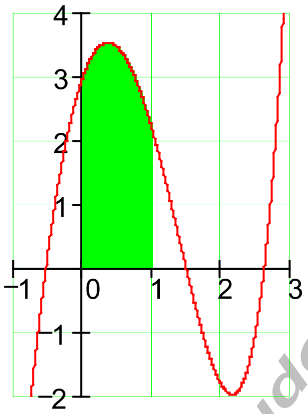
Weitere Regeln für die Integralrechnung

Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$f(x) := 3e^x - 6x^2$$



Die gekennzeichnete Fläche soll berechnet werden.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(3e^x - 6x^2\right) dx$$

$$= 3\int_0^1 e^x\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$3\int_0^1 e^x\,dx + 6\int_1^0 x^2\,dx$$

$$= \left[3e^x\right]_0^1 + \left[2x^3\right]_1^0$$

$$= 3e^1 - 3e^0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1$$

$$= 3e^1 - 5 \approx \underline{\underline{3{,}155}}$$

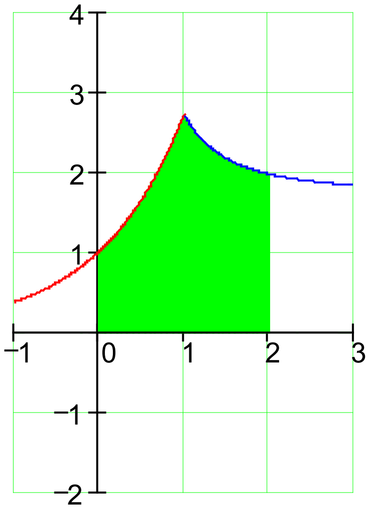
Sind obere und untere Grenze beim bestimmten Integral gleich, so ist der Wert des bestimmten Integrals Null.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Der Wert des gesamten Integrals ergibt sich durch Summierung der Integrale über alle Teilbereiche.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Beispiel:



$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{für } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2}+(e-1) & \text{für } x\geq 1 \end{cases}$$

Die gekennzeichnete Fläche soll berechnet werden.

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+e-1\right)dx$$

$$=\left[e^x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{x}+e\cdot x-x\right]_1^2$$

$$=e^1-e^0+\left[-\frac{1}{2}+2e-2\right]-\left[-1+e-1\right]$$

$$\approx \underline{\underline{3{,}937}}$$

Training Diff_Int01:

Ableiten und integrieren mit e - Funktionen

Differenzieren Sie folgende Funktionen.			
1.	$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$	2.	$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$
3.	$f(x)=-4e^x\left(e^{-x}+3\right)$	4.	$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}$
5.	$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}$	6.	$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^2\right)$
Integrieren Sie folgende Funktionen und kontrollieren Sie die Ergebnisse durch ableiten			
7.	$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$	8.	$f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$
9.	$f(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e$	10.	$f(x)=t^2x\left(x^2-8x\right)$