Funktionenklassen

Einführung:

Bisher haben wir nur ***ganzrationale Funktionen*** kennen gelernt. Sie gehören zu der Klasse der Rationalen Funktionen. In der modernen Mathematik spielen noch weitere Funktionen und Funktionsklassen eine große Rolle.
Im nachfolgenden sollen einige Funktionen kurz vorgestellt und der Verlauf deren Graphen prinzipiell dargestellt werden.
Für den Bereich der Sozialpädagogik haben e-Funktionen und Logarithmusfunktionen eine gewisse Bedeutung.
Auf diese Funktionsklasse soll dann in Verbindung mit der Differential- und Integralrechnung näher eingegangen werden.
Als weiteres wären da noch die gebrochenrationalen Funktionen von gewissem Interesse.

Einiges, was wir bisher über Funktionen gelernt haben kann auf alle Funktionen übertragen werden.

Die wesentliche Eigenschaft einer Funktion ist: Jedem Wert der **unabhängigen Variablen (x)** wird genau ein **Funktionswert f(x)** zugeordnet.

Die **Definitionsmenge (D)** einer Funktion ist die Menge aller unabhängigen Variablen, für die die Funktionsgleichung definiert ist.

Die **Wertemenge (W)** ist die Menge aller Funktionswerte, sie hängt auch von der Definitionsmenge ab.

Rationale Funktionen:

Ganzrationale Funktion n – ten Grades.

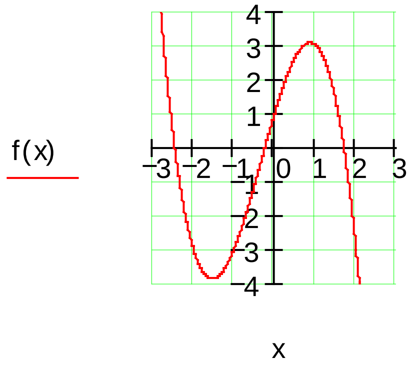
Ganzrationale Funktion n - ten Grades (Polynom n - ten Grades)
Eine Funktion f(x) mit
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
heißt ganzrationale Funktion n - ten Grades.
Die Zahlen a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; .... a_2 ; a_1 ; a_0 heißen Koeffizienten

Ganzrationale Funktionen entstehen durch zusammensetzen von Potenzfunktionen.

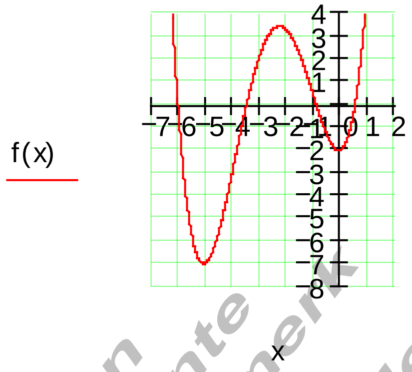
Der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt.
Die Definitionsmenge ist normalerweise die Menge der reellen Zahlen.
Eine ganzrationale Funktion n – ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

Verlauf des Graphen ganzrationaler Funktionen:

$f(x) := -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) := \frac{1}{5}x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



<u>Gebrochenrationale Funktionen n – ten Grades:</u>

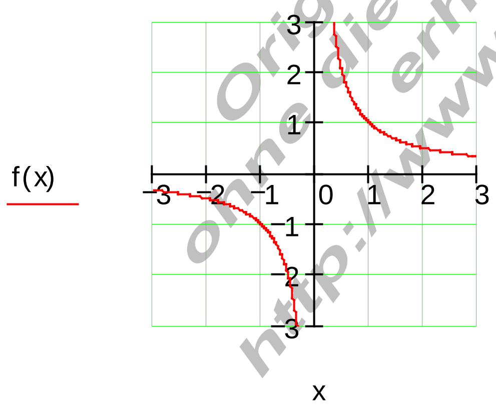
Eine Funktion mit der allgemeinen Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \quad m,n \in \mathbb{N}$$

heißt **gebrochenrationale Funktion**.
Die Definitionsmenge gebrochenrationaler Funktionen ist eingeschränkt.
Überall dort, wo der Nenner Null wird, ist die Funktion nicht definiert.

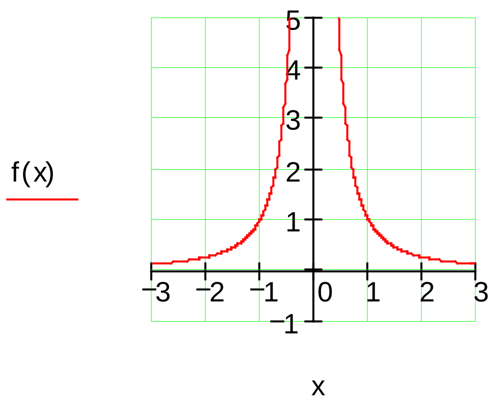
Verlauf des Graphen gebrochenrationaler Funktionen:

$f(x) := \frac{1}{x}$



Hyperbel punktsymmetrisch

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



Hyperbel achsensymmetrisch

Beide Funktionen sind an der Stelle x = 0 nicht definiert.

Transzendente Funktionen

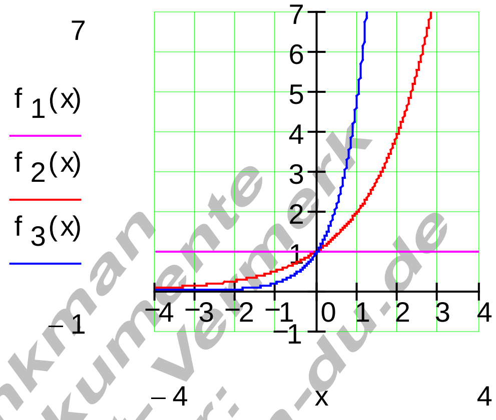
Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Form $\boxed{f(x) = a^x}$ mit $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion

$f_1(x) = 1^x$

$f_2(x) = 2^x$

$f_3(x) = 5^x$

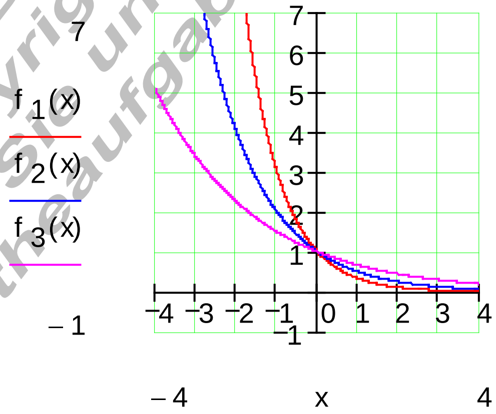


Alle Graphen obiger Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt (0 | 1). Je größer die Basis a ist, desto steiler ist der Kurvenverlauf.

$f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

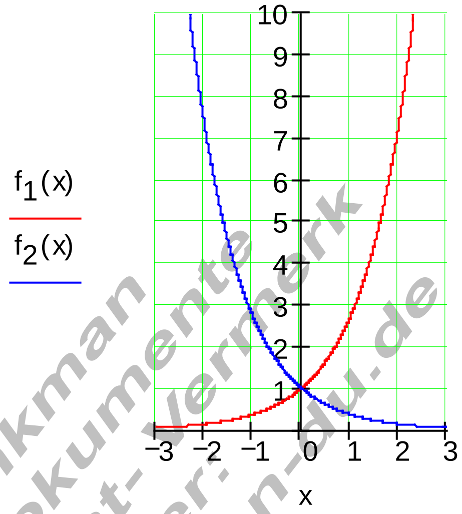
$f_3(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$



Alle Graphen obiger Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt (0 | 1). Je kleiner die Basis a ist, desto steiler ist der Kurvenverlauf

Die e – Funktion als besondere Exponentialfunktion:

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$



Die Graphen verlaufen von II nach I

Ist der Exponent positiv, so ist der Graph monoton steigend.

Ist der Exponent negativ, so ist der Graph monoton fallend.

Es gibt keine Nullstellen.

Für große x – Beträge nähert sich der Graph immer mehr der x – Achse.

Alle Graphen verlaufen durch den Punkt P (0 | 1).

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad e \approx 2,71828....$$

Training EFKT_01:

Graphen von e – Funktionen.

Ermitteln Sie **Verschiebungen, Spiegelung** und **Formänderung** der Grundfunktion e^x.

Zeichnen Sie jeden Funktionsgraphen und die Grundfunktion e^x in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse.

Lesen Sie an dem Graphen ab:

Grenzwerte und falls vorhanden **Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.**

Bemerkung: Berücksichtigen Sie nur die Funktionswerte, die im Intervall [-10 ; 10] liegen.

1.)	$f(x) = e^x\,;\, g(x) = e^{-x}$ für $[-4;4]$	2.)	$f(x) = -e^x$ für $[-5;3]$
3.)	$f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4;4]$	4.)	$f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4;4]$
5.)	$f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5;3]$	6.)	$f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4;4]$
7.)	$f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5;3]$	8.)	$f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2;6]$
9.)	$f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4;4]$	10.)	$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10;5]$

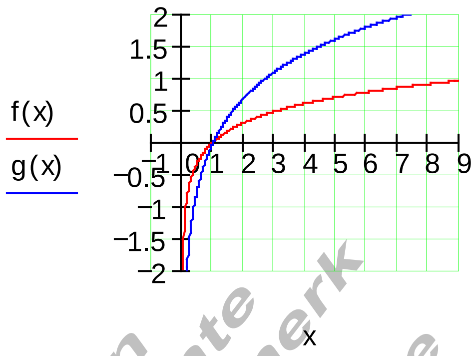
Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen sind nur für positive x – Werte definiert.

Alle Graphen verlaufen durch den Punkt P (1 | 0)

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktion von Exponentialfunktionen

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



Training LNFKT_01:
Graphen von Logarithmusfunktionen.
Zeichnen Sie die Graphen folgender Logarithmusfunktionen und lesen Sie daraus ab:
Verschiebungen und **Formänderung** der Grundfunktion ln (x) ,
Achsenschnittpunkte, **Grenzwerte** und **Extremwerte**.

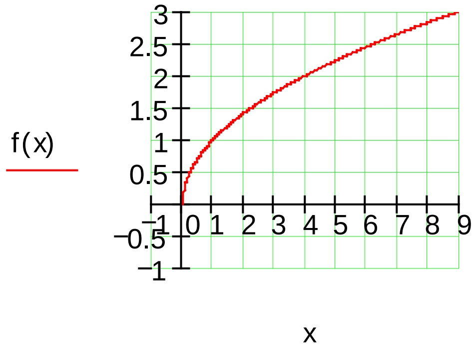
1.)	$f(x)=\ln(x)$ für $(0;8]$	2.)	$f(x)=\ln(-x)$ für $[-8;0)$
3.)	$f(x)=\ln(x^2)$ für $[-4;0)$ und $(0;4]$	4.)	$f(x)=\ln(x-1)+2$ für $(1;9]$
5.)	$f(x)=\frac{1}{2}\ln(x)+1$ für $(0;8]$	6.)	$f(x)=x\cdot\ln(x)$ für $(0;8]$
7.)	$f(x)=-x\cdot\ln(-x)$ für $[-8;0)$	8.)	$f(x)=\ln(x+4)-3$ für $(-4;4]$
9.)	$f(x)=e^{\frac{1}{4}x}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ für $(0;8]$	10.)	$f(x)=2\cdot e^{\frac{1}{4}x^2}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ für $(0;8]$

<u>Wurzelfunktionen.</u>

Wurzelfunktionen sind nur für positive x – Werte definiert.

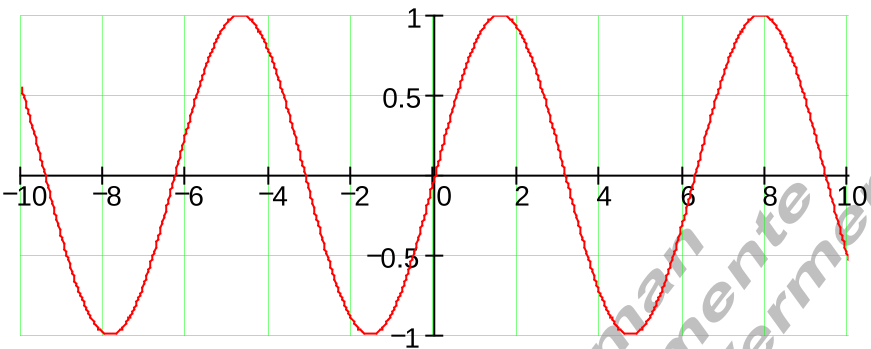
$f(x) := \sqrt{x}$

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen

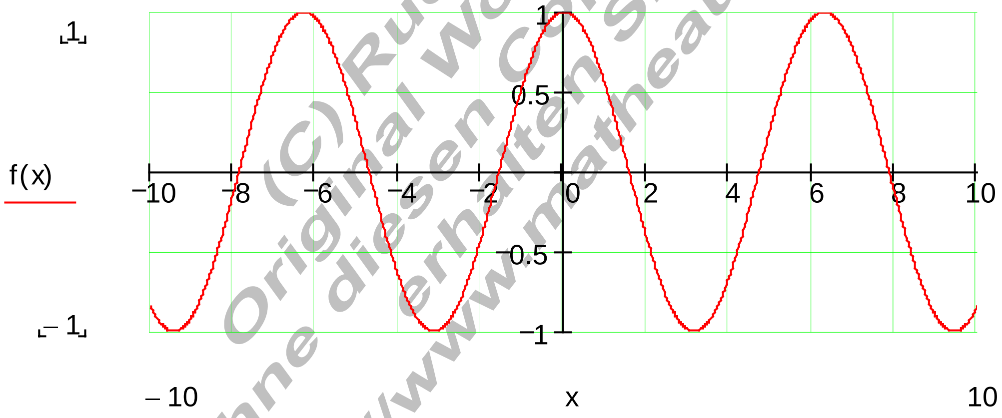


Trigonometrische Funktionen.

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2π
Sie ist für alle reellen x – Werte definiert.
x – Werte werden im Bogenmaß angegeben.



Die Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2π
Sie ist für alle reellen x – Werte definiert.
x – Werte werden im Bogenmaß angegeben.



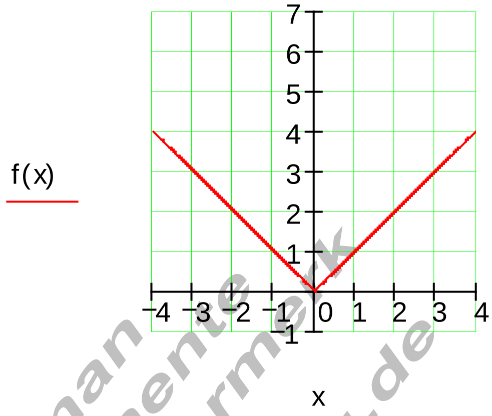
Die Betragsfunktion.

Die Betragsfunktion wird nach der Vorschrift

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gebildet.

$$f(x) := |x|$$



Für alle x – Werte ist sie positiv.

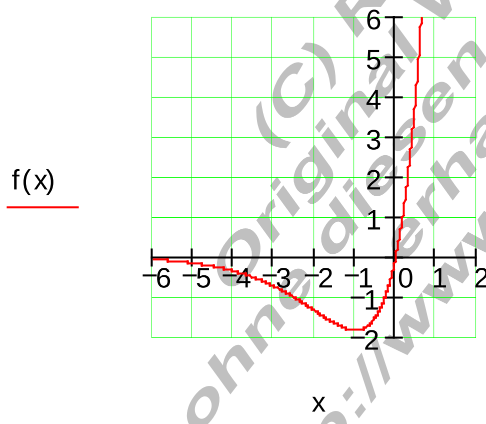
An der Stelle x = 0 ist sie unstetig.

Zusammengesetzte Funktionen.

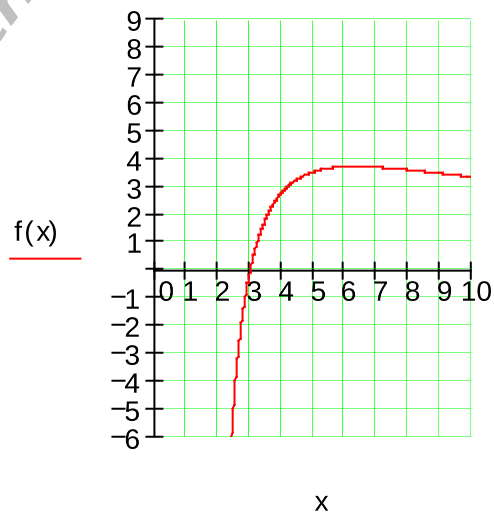
Aus allen bisher bekannten Funktionen lassen sich weitere Funktionen zusammensetzen.

Dazu ein paar Beispiele.

$$f(x) := 5x \cdot e^{x}$$



$$f(x) := \frac{(4x)^2 \cdot \ln(x-2)}{(x)^3}$$



Umkehrfunktionen

Umkehrfunktion
der quadratischen Funktion

$y = f(x) = x^2$

vertauschen der Variablen x und y

$x = f(y) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x$

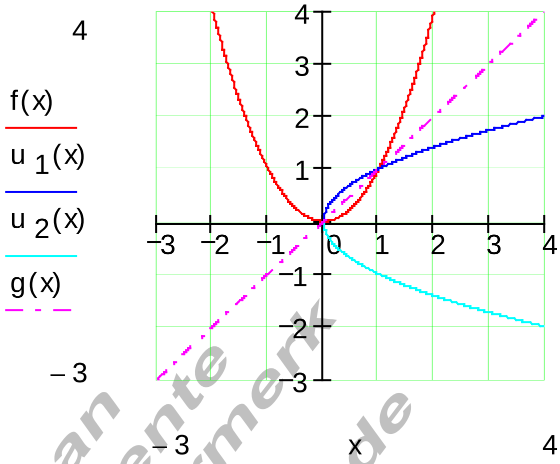
Wurzel ziehen

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ bzw. $y = -\sqrt{x}$

Es gibt also zwei Umkehrfunktionen:

1. $u_1(x) = \sqrt{x}$ und 2. $u_2(x) = -\sqrt{x}$

Bei der Bildung der Umkehrfunktion
wurde die Definitionsmenge eingeschränkt.



Umkehrfunktion der e – Funktion

$y = f(x) = e^x$

vertauschen der Variablen x und y

$x = f(y) = e^y \Leftrightarrow e^y = x$

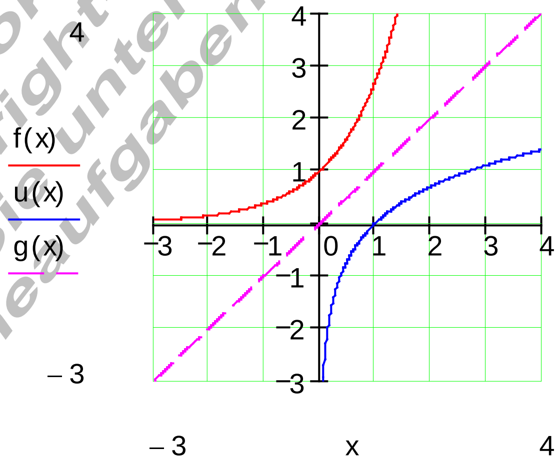
Logarithmieren

$\Rightarrow \ln(e^y) = \ln(x) \Leftrightarrow y = \ln(x)$

Die Umkehrfunktion ist die
Loharithmusfunktion:

$u(x) = \ln(x)$

Bei der Bildung der Umkehrfunktion
wurde die Definitionsmenge eingeschränkt.

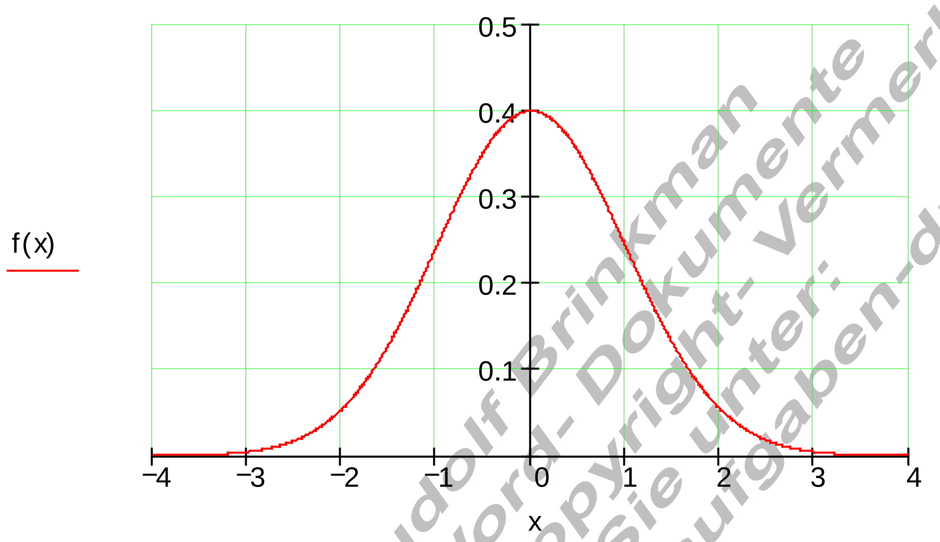


In beiden Fällen ist der Graph der Umkehrfunktion eine Spiegelung der Graphen der Ursprungsfunktion an der Geraden g(x) = x.
Das gilt für alle Funktionen und deren Umkehrfunktionen.

Die gaußsche Glockenkurve.

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$



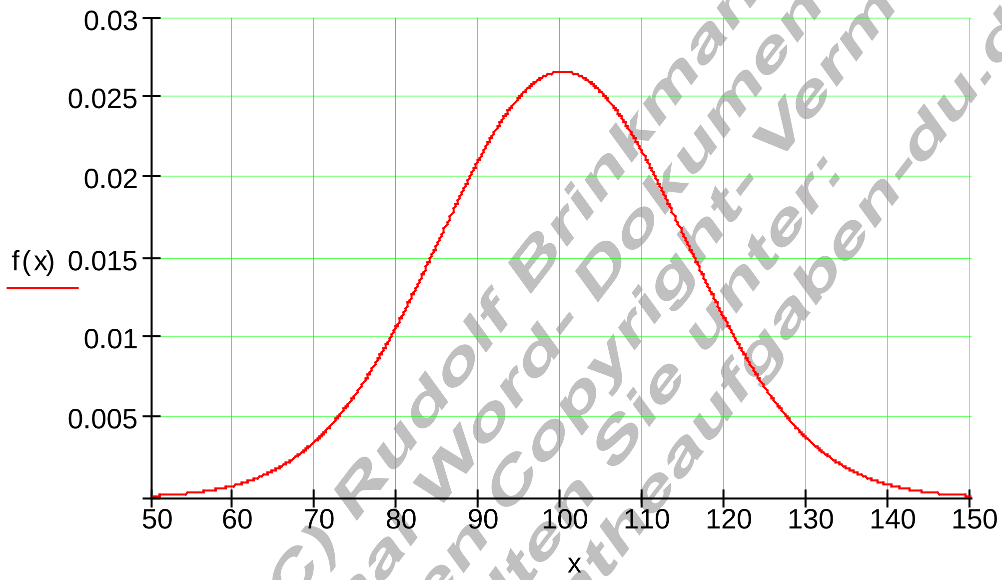
Eigenschaften:
Die Funktion ist achsensymmetrisch.
Die Funktion erreicht in der Mitte bei x = 0 den höchsten Wert.
Nach rechts und links fallen die Werte sehr schnell ab.
Nennenswerte Funktionswerte liegen nur im Bereich von –3 bis +3

Die Ergebnisse von Klassenarbeiten oder psychologischer Tests verteilen sich oft in dieser Form.

Betrachtet man die Fläche unter der Kurve, so beträgt der Anteil, der im Bereich von –1 bis + 1 liegt etwa 68%, das ist etwa 2/3 der Gesamtfläche.

Bei IQ – Messungen haben die meisten Testpersonen einen IQ zwischen 70 und 130.
Nur wenige liegen darunter oder darüber. So dass der Mittelwert bei etwa 100 liegt.
Um diesen Sachzusammenhang mit der gaußschen Glockenkurve zu veranschaulichen, muss die Mitte zu dem Wert 100 verschoben werden.
Auch die Streuung um den Mittelwert wird berücksichtigt.

$\mu := 100$ $\quad \sigma := 15$ $\quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$



Die Transformation der x – Achse erfolgte hier linear mit der Transformationsformel
$IQ = \sigma\cdot x + \mu = 15x + 100$ das bedeutet für $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 85 \le IQ \le 115$

Im Bereich von $85 \le IQ \le 115$ liegen ca. 68% der Testpersonen.

Parameter:

μ ist ein Maß für die Verschiebung der Mitte (hier 100).

σ ist ein Maß für die Streuung (Varianz hier 15).

Vorerst gehen wir hier nicht weiter auf die Parameter ein, das geschieht im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung.