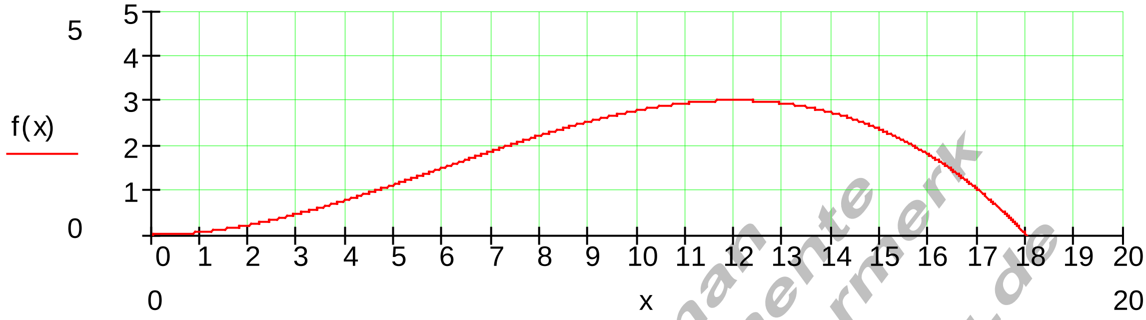
Das Integral als Mittelwert

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist näherungsweise die Flugkurve des Balls bei einem Freistoß in einem Fußballspiel.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



Welche mittlere Flughöhe hat der Ball im Bereich zwischen 7 m und 16 m nach dem Abschuss?

Zunächst legen wir für diesen Bereich eine Wertetabelle an:

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

Der Mittelwert der berechneten Funktionswerte $f(x)$ wird mit der Formel

$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ gebildet. Für unser Beispiel ist $n = 10$ also gilt:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot(1{,}872 + 2{,}222 + 2{,}531 + 2{,}778 + 2{,}941 + 3 + 2{,}934 + 2{,}722 + 2{,}344 + 1{,}778)$$

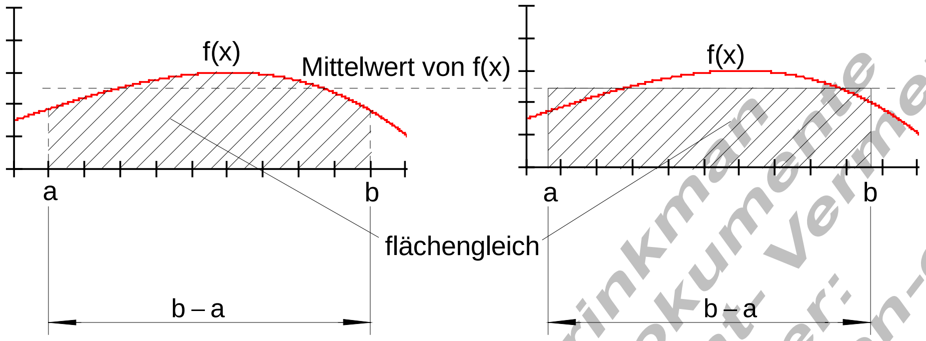
$$= \frac{25{,}122}{10} = 2{,}512$$

Der Ball hätte somit im Intervall [7 ; 16] eine mittlere Flughöhe von 2,512m.
Würde man in gröberen oder feineren Schritten vorgehen, so bekäme man für den jeweiligen Mittelwert andere Ergebnisse heraus.
Bei den x – Werten 7; 10; 13; 16 käme für den Mittelwert 2,34 m heraus.
Bei den x – Werten 7; 7,5; 8; 8,5; ..... käme für den Mittelwert 2,555 m heraus.
Offenbar scheint es so zu sein, dass je kleiner wir die x – Schritte wählen, desto genauer erhalten wir den Mittelwert.

Wir versuchen den Ansatz über das bestimmte Integral.
Nehmen wir zunächst an, die Funktion $f(x)$ sei auf dem Intervall $[a\,;b]$ definiert und positiv.
Stellen wir die Frage: "Welchen Wert nimmt die Funktion im Intervall $[a\,;b]$ im Mittel an?"

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$

stellt den Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Intervall $[a\,;b]$ dar.
Nun stellen wir dieser Fläche ein flächengleiches Rechteck gemäß folgender Skizze gegenüber:



Die waagerechte Seitenlänge des Rechtecks ist gleich der Länge des Intervalls $[a\,;b]$ also $b-a$.
Es leuchtet ein, wenn wir den Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a\,;b]$ als die Höhe des Rechtecks in der obigen Skizze definieren.

Mittelwert der Funktion $\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Vergleich mit dem Mittelwert einer Datenreihe $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Angewendet auf unsere Beispielaufgabe bedeutet das:

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ mit $a = 7$ und $b = 16$ folgt:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{16-7}\int_7^{16}\left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{4\cdot 288}x^4 + \frac{1}{3\cdot 16}x^3\right]_7^{16}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left[-\frac{1}{1152}\cdot 16^4 + \frac{1}{48}\cdot 16^3\right] - \left[-\frac{1}{1152}\cdot 7^4 + \frac{1}{48}\cdot 7^3\right]\right) = \underline{\underline{2{,}598}}$$

Der Ball hätte somit im Intervall [7 ; 16] eine mittlere Flughöhe von 2,598 m.

Das bestimmte Integral wird somit zu einer kontinuierlichen Verallgemeinerung des Begriffs der Summe. Das heißt, je kleiner man die x – Schritte macht, desto mehr nähert man sich an den Mittelwert der Funktion heran. Die Anzahl der Summanden wird dabei immer größer.