Kostenrechnung als Anwendung der Differentialrechnung

Begriffe der Kostenrechnung

Gesamtkosten (Ertragliche Kostenfunktion):

sind die in einem Betrieb bei der Produktion eines Produktes entstehenden Kosten	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Stückkosten:

sind die Gesamtkosten pro Stück	$k(x) = \frac{K(x)}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$

Fixkosten:

sind die Kosten, die auch dann entstehen, wenn nichts produziert wird. (Zinsen, Mieten, Versicherungen, Gehälter usw.)	$K_f(x) = K(0) = d$

Variable Gesamtkosten:

sind die Gesamtkosten ohne Fixkosten	$K_v(x) = K(x) - K_f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Variable Stückkosten:

sind die variablen Kosten pro Stück	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$

Grenzkosten:

Ableitung der Kostenfunktion	$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Betriebsminimum:

befindet sich im Minimum der variablen Stückkosten dort gilt $K'(x) = k_v(x)$	$k_v'(x) = 2ax + b = 0 \quad \wedge \quad k_v''(x) = 2a > 0$

lineare Erlösfunktion:

Preis ***p*** mal Ausbringungsmenge ***x***	$E(x) = p \cdot x$

Gewinnfunktion:

Erlösfunktion - Gesamtkosten	$G(x) = E(x) - K(x) = p \cdot x - ax^3 - bx^2 - cx - d$

Beispiel:

Betriebliche Daten:	
Gesamtkosten $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Fixkosten $K_f(x) = 420\,GE$	
Variable Stückkosten: $k_v(x)$ = 300 GE/ME bei einer Ausbringung von x = 10 ME	
Betriebsminimum k_v (x) = 200 GE bei einer Ausbringung von x = 5 ME	
a)	Stellen Sie die Kostenfunktionsgleichung auf.
b)	Bei 15 ME decken die Erlöse die Kosten (E(x) = K(x)). Bestimmen Sie unter der Voraussetzung das eine lineare Erlösfunktion gegeben ist, den Absatzpreis.
c)	Bestimmen Sie die Gewinnzone.
d)	Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.
e)	Zeichnen Sie die Graphen für K(x) ; G(x) ; k_v (x) und E(x) in ein Koordinatensystem.

Aufstellen der Kostenfunktion:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Fixkosten: $K_f(x) = K(0) = d = 420 \quad \Rightarrow \underline{\underline{d = 420}}$

variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = ax^2 + bx + c$

$k_v(10) = 100a + 10b + c = 300$ $\underline{\text{Gleichung I}}$

Betriebsminimum $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = k_v(x)$

$K'(x) = 75a + 10b + c = 200$ $\underline{\text{Gleichung II}}$

$k_v(5) = 25a + 5b + c = 200$ $\underline{\text{Gleichung III}}$

a	b	c		
100	10	1	300	vertausche
75	10	1	200	I mit III
25	5	1	200	
25	5	1	200	
75	10	1	200	$II - 3 \cdot I$
100	10	1	300	$III - 4 \cdot I$
25	5	1	200	
0	–5	–2	–400	$\cdot(-1)$
0	–10	–3	–500	
25	5	1	200	
0	5	2	400	
0	–10	–3	–500	$III + 2 \cdot II$
25	5	1	200	
0	5	2	400	
0	0	1	300	

zurückrechnen:

$\underline{\underline{c = 300}}$

$5b + 2 \cdot 300 = 400 \Rightarrow \underline{\underline{b = -40}}$

$25a + 5 \cdot (-40) + 300 = 200 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

Kostenfunktion:

$\underline{\underline{K(x) = 4x^3 - 40x^2 + 300x + 420}}$

Der Absatzpreis:

Unter der Voraussetzung dass der Erlös die Kosten deckt, gilt:

$$E(x) = p \cdot x = K(x) \Rightarrow p = \frac{K(x)}{x}$$

$$E(15) = 15p = K(15) \Rightarrow p = \frac{K(15)}{15}$$

$$p = \frac{4 \cdot 15^3 - 40 \cdot 15^2 + 300 \cdot 15 + 420}{15} = \frac{9420}{15} = \underline{\underline{628}}$$

Der Absatzpreis beträgt 628 GE.

Die Gewinnzone:

Gewinnzone bei einem Absatzpreis von 628 GE

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = 628x - 4x^3 + 40x^2 - 300x - 420$

$$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$$

Die Gewinnzone befindet sich dort, wo gilt: $G(x) > 0$

1. Nullstelle: da für 15 ME gilt $E(x) = K(x) \Rightarrow G(15) = E(15) - K(15) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(15 \mid 0)}}$$

Polynomdivision:

$$\left(-4x^3 + 40x^2 + 328x - 420\right) : (x - 15) = \underline{\underline{-4x^2 - 20x + 28}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(-4x^3 + 60\right)} \\
\quad -20x^2 + 328x \\
\quad \underline{-\left(-20x^2 + 300x\right)} \\
\qquad 28x - 420 \\
\qquad \underline{-(28x - 420)}
\end{array}$$

$$-4x^2 - 20x + 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow p = 5 \quad q = -7$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{28}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{53}{4}} \Rightarrow x_1 \approx 1{,}14 \quad x_2 \approx -6{,}14$$

Gewinnzone liegt im Intervall $\underline{\underline{I = \left\{ x \mid -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{53}{4}} \le x \le 15 \right\}_{\mathbb{R}}}}$

Das Gewinnmaximum

$$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$$

$$G'(x) = -12x^2 + 80x + 328$$

$$G''(x) = -24x + 80$$

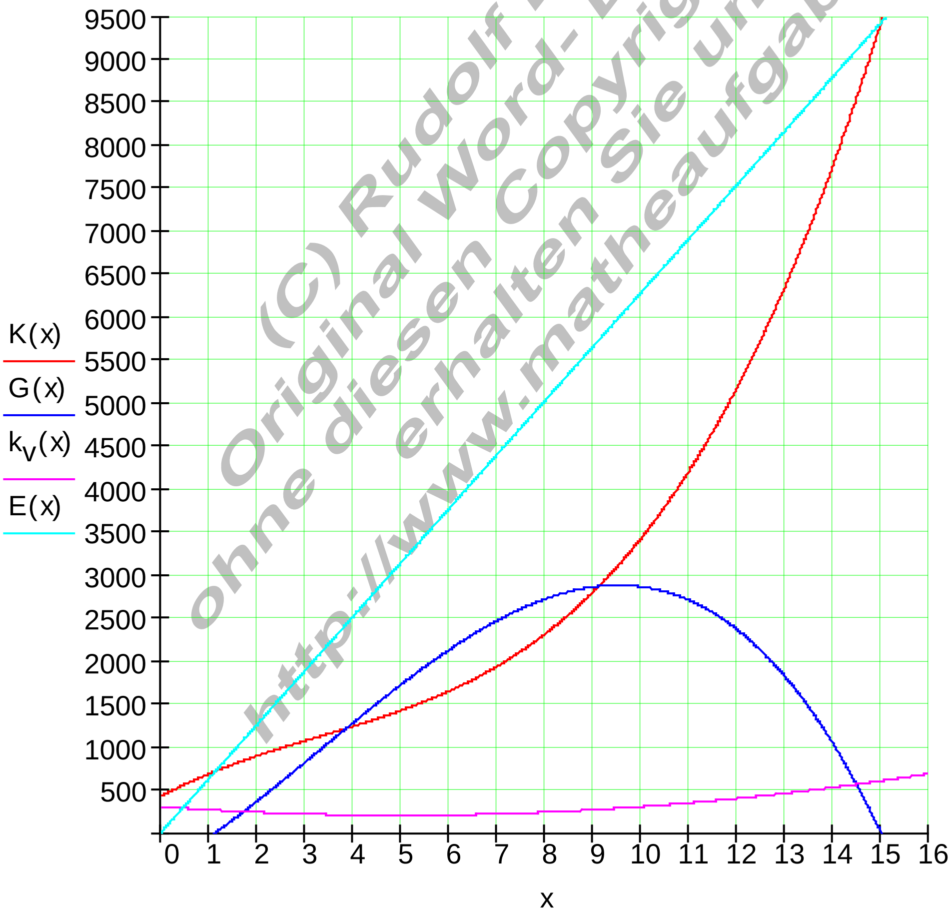
$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 80x + 328 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{82}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{20}{3} \quad q = -\frac{82}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{246}{9}} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{346}{9}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}} \approx 9,53 \quad x_2 = \frac{10}{3} - \sqrt{\frac{346}{9}} \approx -2,87$$

$$G(x_1) = G\left(\frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}}\right) \approx 2876,6 \Rightarrow \text{Gewinnmaximum bei } \underline{\underline{(9,53\text{ME} \,|\, 2879,6\text{GE})}}$$



$K(x)$: Gesamtkosten $G(x)$: Gewinn $k_v(x)$ variable Stückkosten $E(x)$: Erlös