Kurvendiskussion

Vorbetrachtungen

Um den Graphen einer Funktion zeichnen und interpretieren zu können, ist es erforderlich einiges über markante Punkte des Graphen und über seinen Verlauf im Definitionsbereich zu wissen.
Derartige Untersuchungen von Funktionen auf ihre wichtigsten charakteristischen Eigenschaften nennt man Kurvendiskussion.
Bei solchen Untersuchungen sollte man stets systematisch vorgehen und auch immer die gleiche Reihenfolge der Berechnungen und Betrachtungen einhalten, damit man keine wichtigen Eigenheiten der Funktion übersieht.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

Folgende Verfahrensweise hat sich sehr bewährt:

1.	***Definitionsbereich:*** Man bestimmt den Definitionsbereich der Funktion, denn nur innerhalb dieses Bereiches ist es sinnvoll, Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktion anzustellen.
2.	***Symmetrien:*** Man stellt fest, ob die Funktion achsen – oder punktsymmetrisch ist. bei Achsensymmetrie gilt: $f(-x) = f(x)$ In beiden Fällen braucht die Funktion bei Punktsymmetrie gilt: $f(-x) = -f(x)$ nur noch für $x \geq 0$ untersucht zu werden. Speziell bei ***ganzrationalen Funktionen*** gilt: Achsensymmetrie falls nur gerade Exponenten auftreten Punktsymmetrie falls nur ungerade Exponenten auftreten
3.	***Extrema:*** Bestimmen der relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte) Hochpunkt = relatives Maximum hinreichende Bedingung: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$ Tiefpunkt = relatives Minimum hinreichende Bedingung: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) > 0$
4.	***Wendepunkte:*** Bestimmen der Wendepunkte, bzw. der Sattelpunkte hinreichende Bedingung für Wendepunkte $f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$ Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente
5.	***Achsenschnittpunkte:*** Schnittpunkt mit der y – Achse $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ bestimmen Schnittpunkte mit der x – Achse (Nullstellen) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$
6.	***Der Graph:*** Mit allen bisher gesammelten Informationen lässt sich in den meisten Fällen nun der Graph zeichnen. Dazu wird zunächst eine Wertetabelle angelegt. Dabei zeigt es sich, welche Werte noch zu berechnen sind. Das geschieht am besten mit dem HORNER-Schema

7.	***Krümmungsverhalten und Monotonie:*** In der Wendestelle x_W ändert sich die Krümmung des Graphen von $f(x)$ Für die Krümmung in einem beliebigen Punkt x_0 gilt: $f''(x_0) > 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex) $f''(x_0) < 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav) Monotonie: 1. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton wachsend im Intervall I Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton fallend im Intervall I 2. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton wachsend im Intervall I Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton fallend im Intervall I
8.	***Randpunkte des Definitionsbereiches:*** Untersuchung der Funktion in den Randpunkten des Definitionsbereichs. Wenn der Definitionsbereich nicht beschränkt ist, dann sind die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ zu bestimmen.

Beispiel einer ausführlichen Kurvendiskussion

1.	***Definitionsmenge:*** Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$ Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

2.	***Symmetrien:*** Da alle Exponenten gerade sind, liegt eine Achsensymmetrie vor, Es gilt also: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokument ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

3. ***Extrema:***

Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$

Die Ableitungen: $f'(x)=x^3-4x \qquad f''(x)=3x^2-4 \qquad f'''(x)=6x$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \,|\,$ x ausklammern

$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \,|\,$ Satz vom Nullprodukt $\Rightarrow x_1=0$ bzw. $x^2-4=0$

$x^2-4=0 \,|\, +4$

$\Leftrightarrow x^2=4 \,|\, \sqrt{}$

$\Leftrightarrow |x|=2 \Rightarrow x_2=2$ bzw. $x_3=-2$

Stellen mit waagerechter Tangente: $\boxed{x_1=0}\,;\,\boxed{x_2=2}\,;\,\boxed{x_3=-2}$

Nachweis für relatives Maximum bzw. relatives Minimum:

$f''(x_1)=f''(0)=3\cdot 0^2-4=-4<0 \Rightarrow$ rel. Max. für $x_1=\boxed{x_{E1}=0\ \text{(Hochpunkt)}}$

$f''(x_2)=f''(2)=3\cdot 2^2-4=8>0 \Rightarrow$ rel. Min. für $x_2=\boxed{x_{E2}=2\ \text{(Tiefpunkt)}}$

$f''(x_3)=f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0 \Rightarrow$ rel. Min. für $x_3=\boxed{x_{E3}=-2\ \text{(Tiefpunkt)}}$

Die Extrempunkte:

Hochpunkt für $x_{E1}=0$:

$f(0)=-\frac{9}{4}=-2{,}25$

$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0\,|\,-\frac{9}{4}\right)\text{ bzw. }P_{Max}\left(0\,|\,-2{,}25\right)}$

Tiefpunkt für $x_{E2}=2$:

$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^2-\frac{9}{4}=-\frac{25}{4}=-6{,}25$

$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2\,|\,-\frac{25}{4}\right)\text{ bzw. }P_{Min1}\left(2\,|\,-6{,}25\right)}$

Tiefpunkt für $x_{E2}=-2$:

$f(-2)=f(2)=-\frac{25}{4}=-6{,}25$ wegen Achsensymmetrie

$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2\,|\,-\frac{25}{4}\right)\text{ bzw. }P_{Min2}\left(-2\,|\,-6{,}25\right)}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter http://www.matheaufgaben-du.de

4. ***Wendepunkte:***

Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$

Die Ableitungen: $f'(x)=x^3-4x \quad f''(x)=3x^2-4 \quad f'''(x)=6x$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0 \,|+4$

$\Leftrightarrow 3x^2=4 \,|:3$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \,|\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{4}{3}}$ bzw. $x_2=-\sqrt{\frac{4}{3}}$

Mögliche Wendestellen: $\boxed{x_{W1}=\sqrt{\frac{4}{3}}}$; $\boxed{x_{W2}=-\sqrt{\frac{4}{3}}}$

Nachweis auf Wendestellen:

$f'''(xW_1)=f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0\,;\, f'''(x_{W2})=f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=6\cdot\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\neq 0$

Wendepunkt für $x_{W1}=\sqrt{\frac{4}{3}}$

$f(x_{W1})=f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4-2\cdot\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-\frac{9}{4}=-\frac{161}{36}$

$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1{,}15\,|\,-4{,}47)}$

Wendepunkt für $x_{W2}=-\sqrt{\frac{4}{3}}$

$f(x_{W2})=f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{161}{36}$ wegen Achsensymmetrie

$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-1{,}15\,|\,-4{,}47)}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

5.	***Achsenschnittpunkte:***
	a) Schnittpunkt mit der y – Achse: $f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2{,}25)}$
	b) Schnittpunkt mit der x – Achse (Nullstellen):
	$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$
	$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid$ Substitution $x^2 = z$
	$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$ quadratische Gleichung in z
	$\Rightarrow p = -8\,;\, q = -9\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$
	$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9\,;\, z_2 = -1 < 0$ (keine Lösung)
	Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3\,;\, x_2 = -3$
	Nullstellen bei: $\boxed{P_{x1}(3 \mid 0)}\,;\,\boxed{P_{x2}(-3 \mid 0)}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

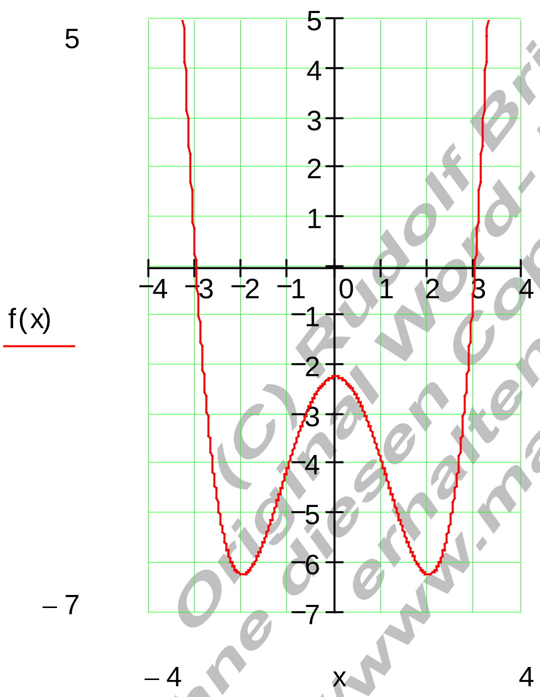
6. Wertetabelle mit Zusatzwerten:

$f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4\,;\ f(-1) = f(1) = -4$

$f(3{,}25) = \frac{1}{4}\cdot(3{,}25)^4 - 2\cdot(3{,}25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4{,}52\,;\ f(-3{,}25) = f(3{,}25) \approx 4{,}52$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	P_{x1}	
x	–3,25	–3	–2	–1,15	–1	0	1	1,15	2	3	3,25
f(x)	4,52	0	–6,25	–4,47	–4	–2,25	–4	–4,47	–6,25	0	4,52

Der Graph



Zusammenfassung:

Achsensymmetrie

Extrempunkte:

$P_{Min1}(2\,|\,-6{,}25)\,;\ P_{Min2}(-2\,|\,-6{,}25)$

$P_{Max}(0\,|\,-2{,}25)$

Wendepunkte:

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\Big|\,-\frac{161}{36}\right);\ P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\Big|\,-\frac{161}{36}\right)$

Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\,|\,-2{,}25)\,;\ P_{x1}(3\,|\,0)\,;\ P_{x2}(-3\,|\,0)$

Krümmung, Monotonie:

konvex: $\left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ und $\left]\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\infty\right[$

konkav: $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$

streng monoton fallend:

$]-\infty\,;-2[$ und $]0\,;2[$

streng monoton wachsend:

$]-2\,;0[$ und $]2\,;\infty[$

Randpunkte:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokument ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung für $x_0 = -2$ (links von P_{W2}):

$$f''(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 8 > 0 \quad \boxed{\text{linkskrümmung (konvex) für } \left]-\infty\,;-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right[}$$

Krümmung für $x_0 = 0$ (zwischen P_{W1} und P_{W2}):

$$f''(0) = -4 < 0 \quad \boxed{\text{rechtskrümmung (konkav) für } \left]-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,;\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right[}$$

Krümmung für $x_0 = 2$ (rechts von P_{W2}):

$$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \quad \boxed{\text{linkskrümmung (konvex) für } \left]\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,;\infty\right[}$$

streng monoton fallend für $]-\infty\,;-2[$

streng monoton wachsend für $]-2\,;0[$

streng monoton fallend für $]0\,;2[$

streng monoton wachsend für $]2\,;\infty[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de