Extrempunkte ganzrationaler Funktionen

Vorbetrachtungen und Begriffserklärungen

Beim zeichnen eines Funktionsgraphen war es bislang unbefriedigend, den Hochpunkt und den Tiefpunkt nicht zu kennen.
Mit Hilfe der Differentialrechnung wollen wir nun versuchen, dieses Problem zu lösen.

Definition:

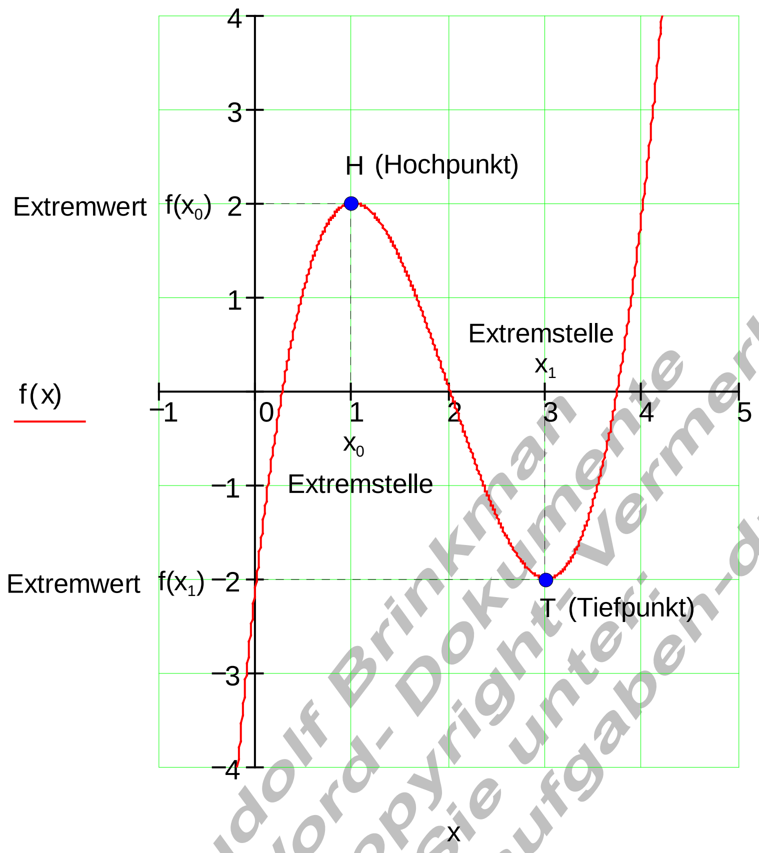
Ein Punkt $H\left(x_0 \mid f\left(x_0\right)\right)$ auf dem Graphen von $f\left(x\right)$ heißt Hochpunkt, wenn $f\left(x_0\right)$ der größte Funktionswert für alle x aus einer Umgebung von x_0 ist.
Dieser größte Funktionswert $f\left(x_0\right)$ heißt relatives (lokales) Maximum an der Stelle x_0.

Ein Punkt $T\left(x_1 \mid f\left(x_1\right)\right)$ auf dem Graphen von $f\left(x\right)$ heißt Tiefpunkt, wenn $f\left(x_1\right)$ der kleinste Funktionswert für alle x aus einer Umgebung von x_1 ist.
Dieser kleinste Funktionswert $f\left(x_1\right)$ heißt relatives (lokales) Minimum an der Stelle x_1.

Hochpunkte bzw. Tiefpunkte nennt man Extrempunkte des Graphen von f(x).
Der x – Wert eines Extrempunktes heißt Extremstelle,
der Funktionswert einer Extremstelle heißt Extremwert.

Bemerkung:
Statt relatives Maximum schreiben wir rel. Max.
Statt relatives Minimum schreiben wir rel. Min.
Statt $H\ (\ x_0 \mid f(x_0)\ )$ schreiben wir $P_{Max}\ (\ x_0 \mid f(x_0)\ )$
Statt $T\ (\ x_0 \mid f(x_0)\ )$ schreiben wir $P_{Min}\ (\ x_0 \mid f(x_0)\ )$

$$f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 + 9x - 2$$



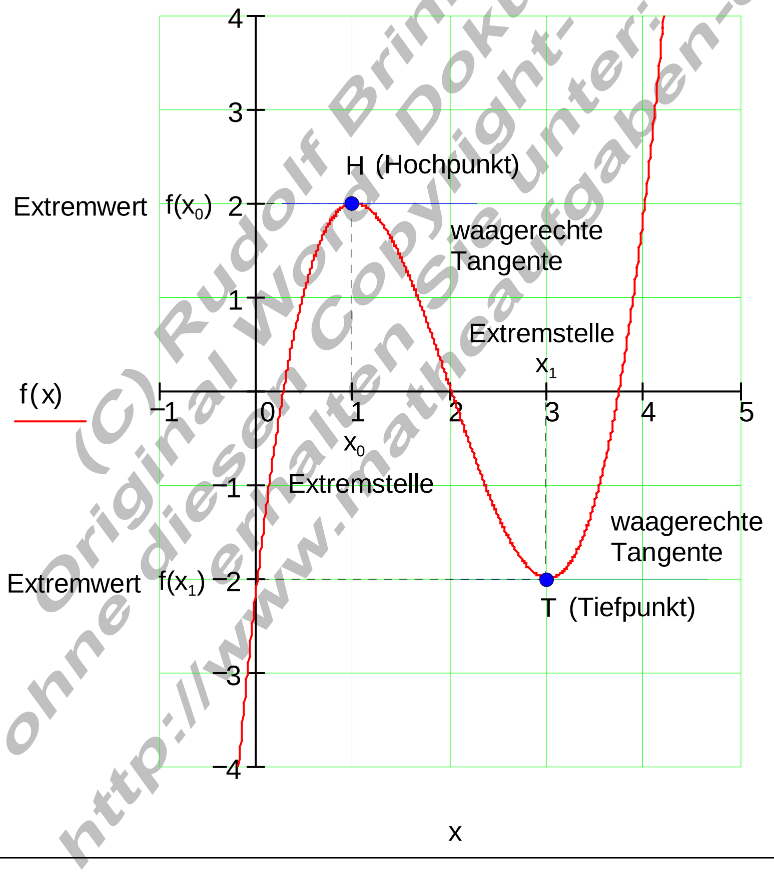
Wie findet man nun die Extrempunkte des Graphen einer Funktion f(x) ?

Eine Tangente, die an einem Extrempunkt einer dort differenzierbaren Funktion angelegt wird, ist immer waagerecht, sie hat die Steigung Null.
Da die Tangentensteigung in einem bestimmten Punkt auch immer die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Punkt beschreibt, folgern wir daraus, dass die Steigung des Funktionsgraphen in einem Extrempunkt auch immer gleich Null ist.

Wir erinnern uns daran, dass man aus der Ableitung einer Funktion die Ableitungsfunktion erhält. Diese beschreibt die Steigung der Funktion an jedem Punkt. Eine notwendige Bedingung für einen Extremwert ist also, dass die erste Ableitung an diesem Punkt Null ist.

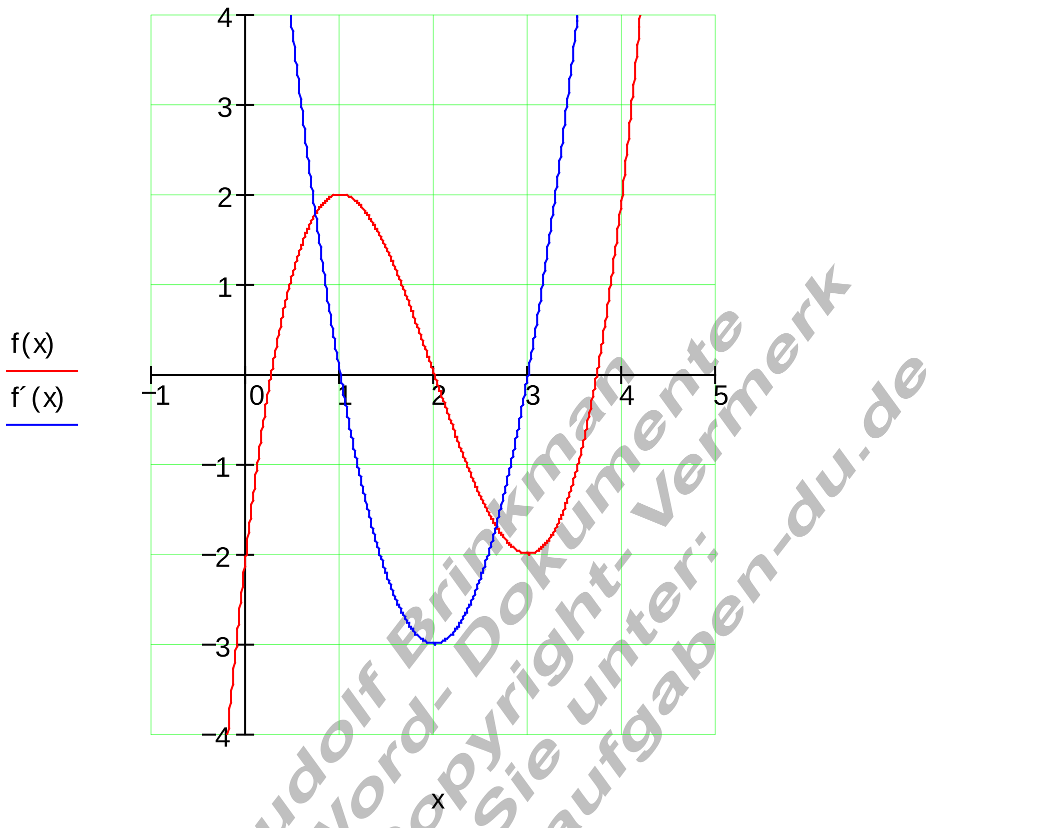
Notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x) = 0$

$$f(x) := x^3 - 6\cdot x^2 + 9x - 2$$



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$



An der Grafik sehen wir, dass an den Extremstellen das Vorzeichen der Steigung wechselt.
Links vom Hochpunkt (relatives Maximum) ist die Steigung positiv und rechts vom relativen Maximum (rel. Max.) ist die Steigung negativ.
Links vom Tiefpunkt (rel. Min.) ist die Steigung negativ und rechts vom rel. Min ist die Steigung positiv.

In einer Umgebung vom rel. Max. bedeutet das für die Ableitungsfunktion, das deren Steigung negativ sein muss.
In einer Umgebung vom rel. Min. bedeutet das für die Ableitungsfunktion, das deren Steigung positiv sein muss.

Der Nachweis ob ein Extrempunkt Hochpunkt oder Tiefpunkt ist, lässt sich auf zwei Arten führen.

Nachweis für Extrempunkte über Vorzeichenwechsel von f’(x).

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Notwendige Bedingung für Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Rightarrow$ Stellen mit waagerechter Tangente sind

$x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Nachweis für Extrempunkte:

$f(x) = 3(x-1)(x-3)$

	$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
$3(x-1)$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Bei $x = 1$ Vorzeichenwechsel von $+$ nach $- \Rightarrow$ rel. Max.

Bei $x = 3$ Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+ \Rightarrow$ rel. Min.

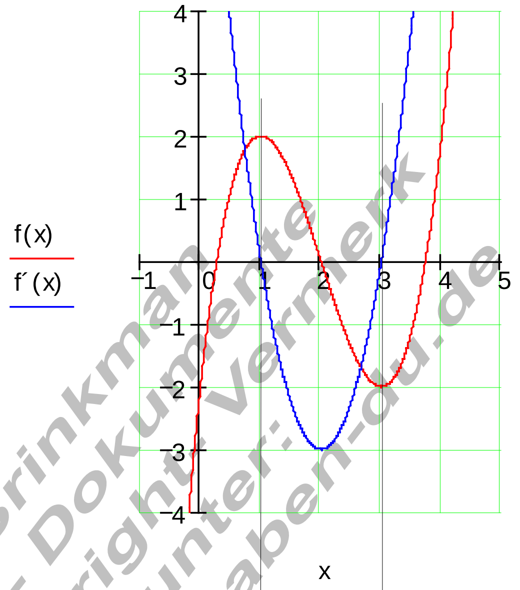
Einsetzen der x – Werte in $f(x)$:

$f(1) = 2 \quad \Rightarrow H(1 \mid 2)$ rel. Max.

$f(3) = -2 \Rightarrow T(3 \mid -2)$ rel. Min.

$f(x) := x^3 - 6\cdot x^2 + 9x - 2$

$f'(x) := 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 9$



wachsend	fallend	wachsend
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

$f'(1) = 0 \quad f'(3) = 0$

Bemerkung:
Die Bedingung für eine waagerechte Tangente f’(x) = 0 ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes, ist dafür aber nicht hinreichend. Erst der Nachweis über einen Vorzeichenwechsel liefert eine hinreichende Bedingung und kennzeichnet den Extrempunkt als rel. Min. oder als rel. Max.

Beispiel:

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$

Waagerechte Tangente bei $x = 0$

Überprüfung, ob bei $x = 0$ für $f'(x)$ ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

$f'(x) = 3x^2$

	$x < 0$	$x > 0$
$3x^2$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$

Es liegt an der Stelle $x = 0$ für $f'(x)$ kein Vorzeichenwechsel vor.

Das bedeutet, an der Stelle $x = 0$ gibt es keinen Extrempunkt.

<u>Nachweis für Extrempunkte mit Hilfe der zweiten Ableitung von f(x)</u>

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3$

$p = -4 \quad q = 3 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1) = f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_1 = 3$

$f''(x_2) = f''(1) = 6 - 12 - 6 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2 = 1$

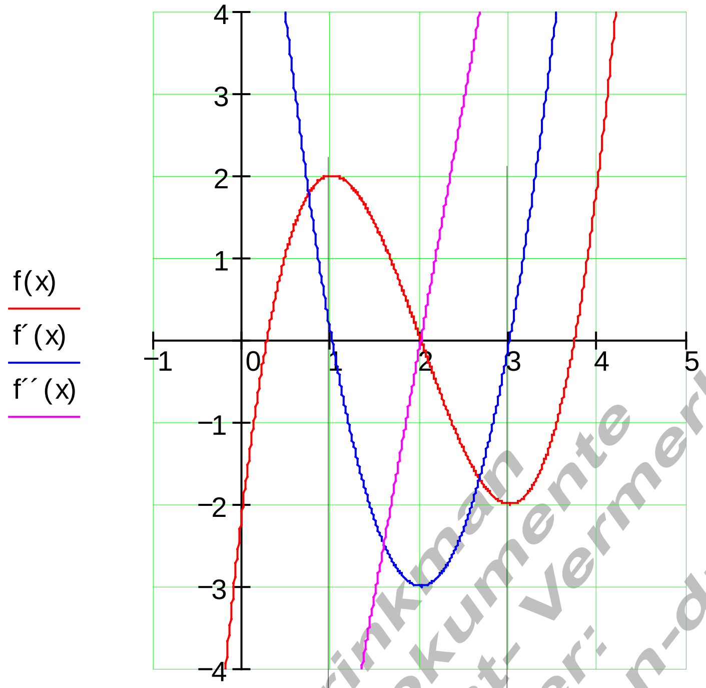
4. Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1) = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = -2$

$f(x_2) = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 2$

5. Die Extrempunkte:

$P_{Min}(3 \mid -2) \qquad P_{Max}(1 \mid 2)$



Steigung von f'(x) an der Stelle x = 1	x	x = 3
	ist negativ	ist positiv
das bedeutet	f''(1) < 0	f''(3) > 0
f(x) hat einen	Hochpunkt	Tiefpunkt

Zusammenfassung:

1. Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$

   liefert die Stellen x_1, x_2, ... mit waagerechten Tangenten

2. Nachweis auf Hochpunkt (rel. Max.) bzw. Tiefpunkt (rel. Min.)

Vorzeichenuntersuchung von $f'(x)$	Nachweis über die zweite Ableitung
Hat $f'(x)$ an der Stelle x_1 einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $+$ nach $-$ so hat $f(x)$ ein relatives Maximum bei $\underline{\underline{H(x_1 \mid f(x_1))}}$	Ist $f''(x_1) < 0$ so hat $f(x)$ ein relatives Maximum bei $\underline{\underline{H(x_1 \mid f(x_1))}}$
Hat $f'(x)$ an der Stelle x_1 einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $-$ nach $+$ so hat $f(x)$ ein relatives Minimum bei $\underline{\underline{T(x_1 \mid f(x_1))}}$	Ist $f''(x_1) > 0$ so hat $f(x)$ ein relatives Minimum bei $\underline{\underline{T(x_1 \mid f(x_1))}}$

3. Einsetzen der x – Werte in f(x) liefert die Funktionswerte (y – Werte) der Extrempunkte.

Bemerkung:
Der Nachweis über die zweite Ableitung ist in den meisten Fällen der einfachste Weg zum Auffinden der Extrempunkte.

Fassen wir die Bedingungen für Extrempunkte zusammen:

Hochpunkt = relatives Maximum

hinreichende Bedingung:

$f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$

Tiefpunkt = relatives Minimum

hinreichende Bedingung:

$f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) > 0$

Kommentierte Beispiele:

Beispiel 1:

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \qquad f''(x) = x - 1$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1) = f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1 = 0$

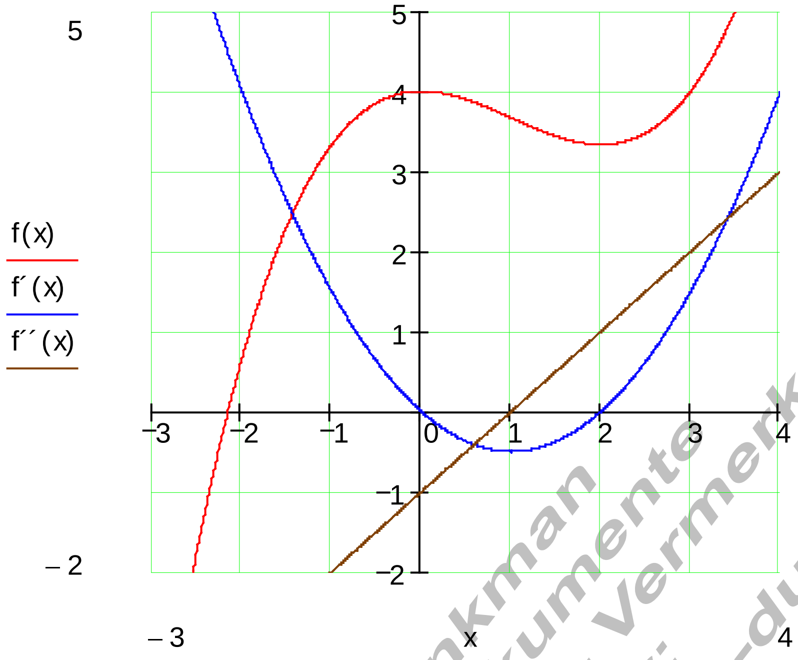
$f''(x_2) = f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_2 = 2$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1) = f(0) = 4 \qquad f(x_2) = f(2) = \frac{10}{3}$$

5. Die Extrempunkte:

$$P_{Max}(0|4) \qquad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3} \approx 3{,}333\right)$$


5
f(x)
f´(x)
f´´(x)
– 2
– 3
x
4
−3 −2 −1 0 1 2 3 4
5 4 3 2 1 −1 −2

Beispiel 2:

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4 \qquad f'(x) = -2x^2 + 8x - 4 \qquad f''(x) = -4x + 8$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-2x^2 + 8x - 4 = 0}_{\text{quadratische Gleichung}} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 2 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414 \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \end{array} \right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1) = f''\left(2 + \sqrt{2}\right) = -4\left(2 + \sqrt{2}\right) + 8 = -4\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''\left(2 - \sqrt{2}\right) = -4\left(2 - \sqrt{2}\right) + 8 = 4\sqrt{2} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

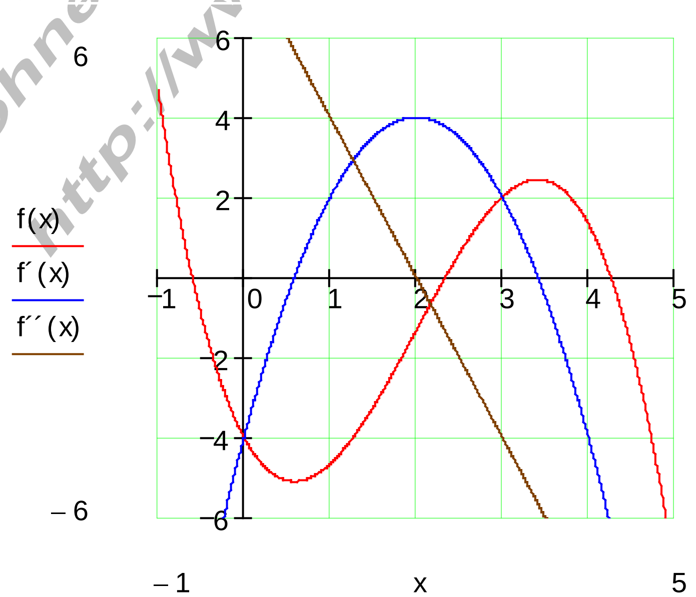
4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1) = f\left(2 + \sqrt{2}\right) = -\frac{2}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right)^3 + 4\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(2 + \sqrt{2}\right) - 4 \approx 2{,}438$$

$$f(x_2) = f\left(2 - \sqrt{2}\right) = -\frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)^3 + 4\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(2 - \sqrt{2}\right) - 4 \approx -5{,}105$$

5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Max}\left(2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414 \mid 2{,}438\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{Min}\left(2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \mid -5{,}105\right)}}$$



Bemerkung:
Zur Bestimmung der Extremwerte sind die Werte der Extremstellen möglichst genau in die Funktionsgleichung einzusetzen.
Um Punkte in ein Koordinatensystem zu zeichnen, reicht eine Genauigkeit von 2 Stellen hinter dem Komma aus.

Notwendige Bedingung, hinreichende Bedingung

Svenja möchte selbst mit dem Auto zur Schule fahren.
Eine ***notwendige Bedingung*** ist, dass sie eine ***gültige Fahrerlaubnis*** hat.
Das allein reicht aber nicht aus, sie benötigt auch ein Auto.

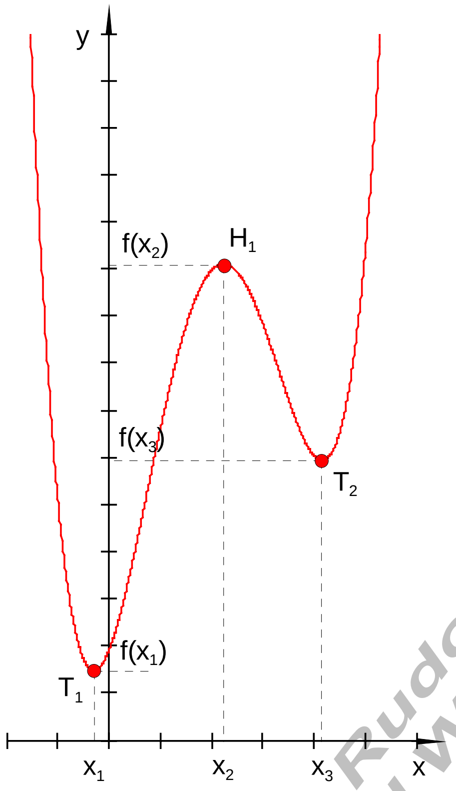
Herr Meier hat einen gültigen Führerschein.
In seiner Garage stehen zwei betankte und zugelassene Autos, die ihm gehören.
Dieser Sachverhalt ist ***hinreichend*** dafür, dass Herr Meier als Fahrer agiert.
Aber zwei eigene Autos müssen nicht sein.

Petra hat auch einen Führerschein, ihr steht ein fahrbereites, zugelassenes Auto zur Verfügung. Diese Bedingung ist ***notwendig und hinreichend***, Petra darf unbesorgt fahren.

Relative und absolute Extrema

Bislang sprachen wir nur von einem relativen Minimum, bzw. von einem relativen Maximum. Diese Extrema sind lokal.

Wir betrachten nun eine Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich D = IR



$x_1 ; x_2 ; x_3$	Extremstellen
$f(x_1)$	absolutes Minimum
$f(x_2)$	relatives Maximum
$f(x_3)$	relatives Minimum
$T_1 ; T_2$	Tiefpunkte
H_1	Hochpunkt

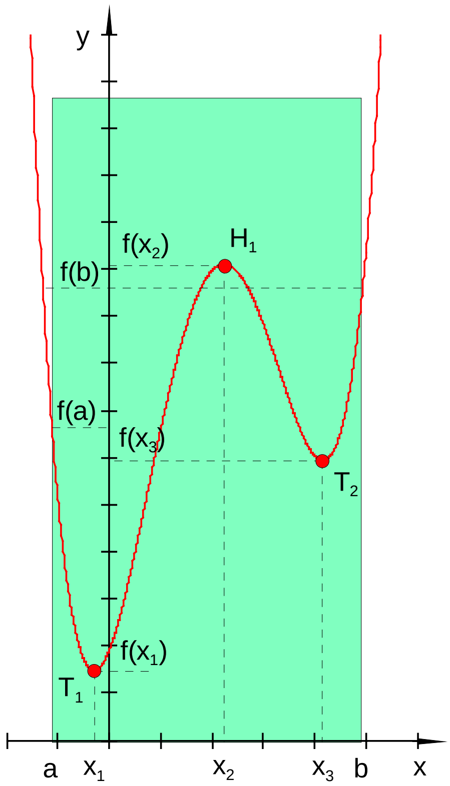
$f(x)$ hat kein absolutes Maximum

Das Verhalten der Funktionswerte für immer kleiner werdende x – Werte, bzw. für immer größer werdende x – Werte soll nun betrachtet werden.

Für immer kleiner werdende x – Werte werden die Funktionswerte immer größer, gleiches gilt auch für immer größer werdende x – Werte.
Wir schreiben:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Ist die gleiche Funktion auf einem Intervall D = [a ; b] definiert, dann gilt:



$x_1 ; x_2 ; x_3$	Extremstellen
$a ; b$	Randstellen
$[a ; b]$	Definitionsmenge
$f(x_1)$	absolutes Minimum
$f(x_2)$	absolutes Maximum
$f(x_3)$	relatives Minimum
H_1	Hochpunkt
$T_1 ; T_2$	Tiefpunkte
$f(a)$	Randextremum
$f(b)$	Randextremum

Liegt als Definitionsmenge ein Intervall vor, so sind die Funktionswerte auch an den Randstellen zu untersuchen.

Definition:

Ist f (x_0) der größte oder kleinste Funktionswert in einer Umgebung von x_0 , so ist f (x_0) ein ***relatives Extremum.***
Ist f (x_0) der größte oder der kleinste Funktionswert innerhalb des Definitionsbereichs, so ist f (x_0) ein ***absolutes Extremum***.