Tangente und Normale

Tangentensteigung

Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt P (x_0 | f (x_0)) ist gleichbedeutend mit der Steigung der Tangente in diesem Punkt.
Nachfolgend soll nun die Gleichung einer solchen Tangente bestimmt werden.
Dazu betrachten wir die Funktion f(x) und deren Ableitungsfunktion etwas genauer.

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ (quadratische Funktion) $\quad f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (Ableitungsfunktion)

Sowohl für die Funktion, wie auch für deren Ableitungsfunktion wird eine Wertetabelle aufgestellt.

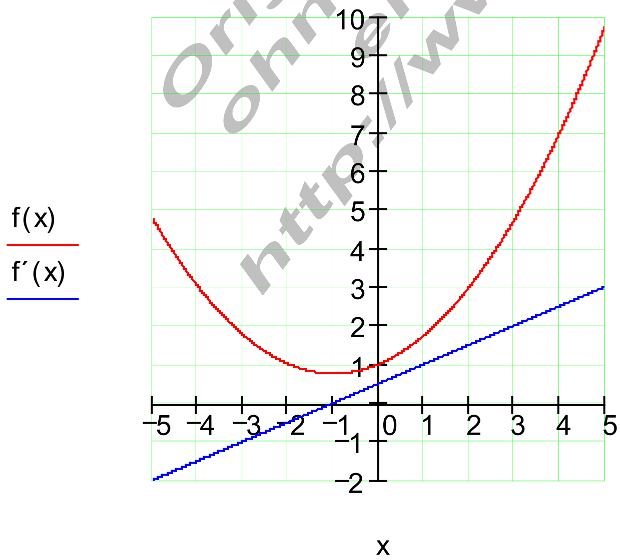
Wertetabelle:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Aus der Wertetabelle kann der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f(x) abgelesen werden:
$S(-1 | 0,75)$.
Für den Wert $x = -1$ ist der Wert der Steigungsfunktion $f'(-1) = 0$
Das bedeutet, im Scheitelpunkt S ist die Steigung von f(x) Null.
Die Tangente in S hat ebenfalls die Steigung Null, sie verläuft dort waagerecht.

Die Graphen:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Wir betrachten nun für den Wert $x_0 = 2$ die Werte für $f(x_0)$ und $f'(x_0)$

$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow P(2\,|\,3)$ liegt auf dem Graphen von $f(x)$

$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ bedeutet,

im Punkt $P(2\,|\,3)$ hat der Graph von $f(x)$ die Steigung $\frac{3}{2}$ oder

die Tangente an dem Graphen von $f(x)$ im Punkt $P(2\,|\,3)$ hat die Steigung $\frac{3}{2}$

Merke:
Einsetzen eines x- Wertes in f(x) ergibt die y- Koordinate von P (x | y).
Einsetzen eines x- Wertes in f'(x) ergibt die Steigung des Graphen oder die Steigung der Tangente von f(x) im Punkt P (x | y).

Tangentengleichung, Normalengleichung

Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente an einen Graphen durch deren Berührungspunkt verläuft.
Gegeben ist die Funktion
$f(x) = -x^2 - x + 2$
Die Gleichung für Tangente und Normale sollen an der Stelle x_0 = 2, also für den Punkt P (2 | f(2)) bestimmt werden.

Vorüberlegung:
Die Tangente ist eine Gerade mit der Gleichung:
$t(x) = m_t x + b_t$
Die Normale ist eine dazu senkrechte Gerade:
mit $m_n = -\frac{1}{m_t}$ also mit der Gleichung $n(x) = -\frac{1}{m_t}x + b_n$
Die Steigung der Tangente entspricht der Steigung des Graphen von f(x) im Punkt P.

Vorgehensweise:
Der Wert für x_0 wird in den Funktionsterm von f(x) eingesetzt. Damit erhält man die fehlende Koordinate von P.
Die Funktion f(x) wird abgeleitet.
Der Wert für x_0 wird in den Ableitungsterm f'(x) eingesetzt. Da f'(x) die Steigungsfunktion von f(x) ist, erhält man somit die Steigung m_t der Tangente in P.
Die Steigung m_t und die Koordinaten des Punktes P werden nun in die Tangentengleichung eingesetzt. Damit erhält man den Ordinatenabschnitt b_t der Tangente und die Tangentengleichung ist fertig.
Um die Gleichung der Normalen zu erhalten, verfährt man analog, verwendet für deren Steigung jedoch den negativ reziproken Tangentensteigungswert.
Nachfolgende Rechnung soll das verdeutlichen.

Rechnung:

$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1$

Koordinaten des Punktes $P(2\,|\,f(2))$:

$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P(2\,|\,-4)}}$

Steigung in $P(2\,|\,-4)$:

$f'(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{m_t = -5}}$ (Tangentensteigung)

Tangentengleichung:

$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$ Die Tangente verläuft durch den Punkt

$P(2\,|\,-4) \Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = -5x + 6}}$ ist die Gleichung der Tangente durch $P(2\,|\,-4)$

Normalengleichung:

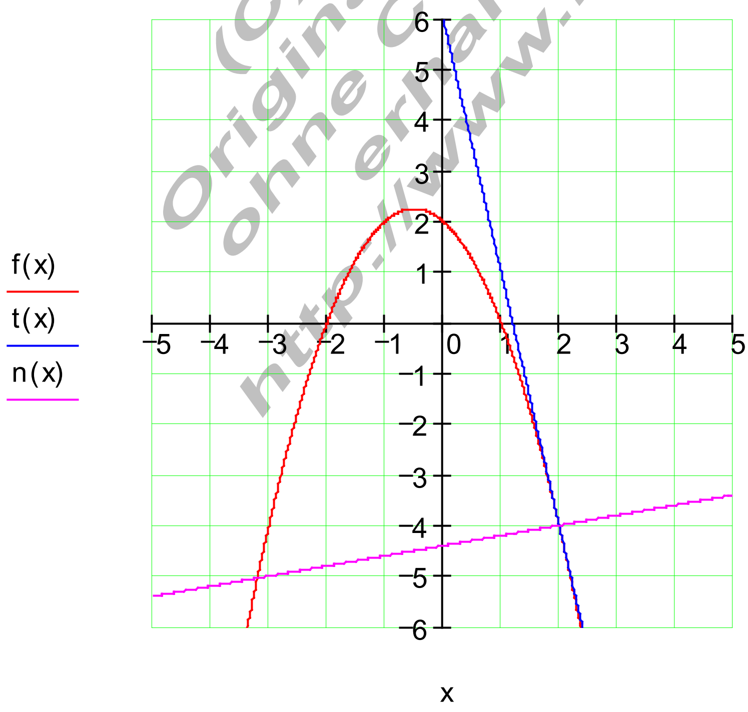
$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$ Die Normale verläuft durch den Punkt

$P(2\,|\,-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$ ist die Gleichung der Normalen durch $P(2\,|\,-4)$

Graphen:

$f(x) := -x^2 - x + 2 \quad t(x) := -5x + 6 \quad n(x) := \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$



Allgemeine Herleitung der Tangenten – und Normalengleichung

Damit man nicht in jedem einzelnen Fall obige Rechnung erneut durchführen muss, leiten wir nun eine allgemeine Formel her.
Die Tangente soll den Graphen von f(x) im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) berühren.
Die Normale soll den Graphen von f(x) im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) senkrecht schneiden.

Tangentengleichung: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

mit $m_t = f'(x_0)$ wird $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t$ (1)

da $P(x_0 \mid f(x_0))$ ein Punkt der Tangente ist, folgt:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x_0 + b_t = f(x_0)$$

$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ eingesetzt in (1) ergibt:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= \underline{\underline{f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

Die Normale verläuft senkrecht durch den gleichen Punkt wie die Tangente.

Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

$$\Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

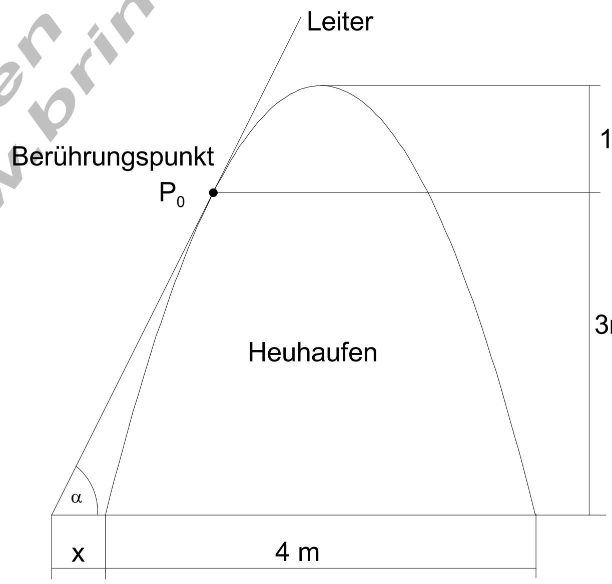
Anwendungsbeispiel:

Eine Leiter soll so an einen Heuhaufen gelehnt werden, dass sie den Haufen in einer Höhe von 3 m vom Boden aus berührt.

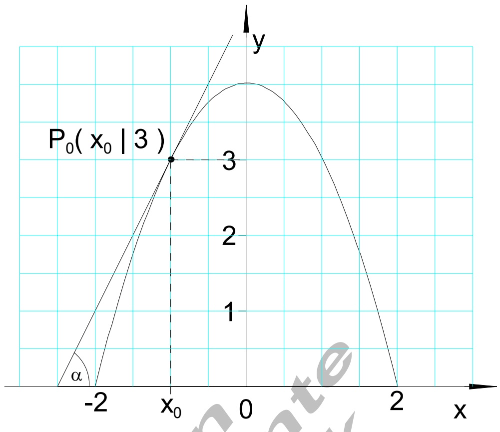
Der Heuhaufen hat die Form einer umgestülpten Parabel, ist 4 m hoch und hat an der Basis einen Durchmesser von ebenfalls 4 m.

Unter welchem Winkel muss die Leiter angelegt werden?

Wie weit vom Fuß des Heuhaufens muss die Leiter auf dem Boden aufgesetzt werden?



Wir legen die y – Achse durch den Scheitelpunkt des Graphen



Die Parabel hat die Funktionsgleichung:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

Wir bestimmen den Wert für x_0 :

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

Für die weitere Rechnung ist der Wert $x_0 = -1$ zu verwenden.
Die Leiter berührt den Heuhaufen im Punkt $P_0(-1|3)$
Wir bestimmen die Gleichung der Tangente im Punkt P_0

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$\text{mit } f'(x) = -2x \text{ wird } f'(x_0) = f'(-1) = -2\cdot(-1) = 2$$
$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

Anstellwinkel: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

Der Abstand vom Heuhaufen, wo die Leiter aufgesetzt werden muss, ist der Abstand zwischen der Nullstelle von f(x) und der Nullstelle von t(x).

Nullstellen:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

Der Abstand zwischen den x – Werten $-2{,}5$ und -2 beträgt $\underline{\underline{0{,}5}}$

Die Leiter muss 0,5 m vom Fuß des Heuhaufens entfernt auf den Boden aufgesetzt werden.

Aus dieser Aufgabenstellung haben wir gelernt, wie man die Gleichung einer Tangente bestimmt, die den Graphen in einem definierten Punkt berührt.

Beispiel:
Die Gleichung der Tangente soll ermittelt werden, die den Graphen von f(x) im Punkt P berührt.

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(-2)) \Rightarrow x_0 = -2$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) = f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$
$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$
$$\Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

Zusammenfassung:

Tangente und Normale an den Graphen von $f(x)$ durch den Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$

Gleichung der Tangente

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0)$$

Gleichung der Normalen

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\; f'(x_0) \neq 0$$

Wie geht man vor, wenn die Formel angewendet wird?

Die Koordinate x_0 wird als bekannt vorausgesetzt.
Die 2. Koordinate von P erhält man durch einsetzen von x_0 in den Term von f(x).
Die Ableitung von f(x), also f'(x) wird gebildet.
Die Steigung der Tangente erhält man durch einsetzen von x_0 in den Term von f'(x).
Die berechneten Werte setzt man in die Gleichung für Tangente bzw. Normale ein und vereinfacht diese durch umformen.