Sätze zur Differentialrechnung (Differentationsregeln)

Bisher bekannte Regeln:

Potenzregel	
1.) Alten Exponenten als Faktor vor die Variable x setzen. 2.) Neuer Exponent ist alter Exponent vermindert um eins.	$f(x) = x^q \quad \Rightarrow \quad f'(x) = q \cdot x^{q-1} \quad \text{mit } q \in \mathbb{Q}$

Konstantenregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus einer elementaren Funktion multipliziert mit einer Konstanten. Dann ist die Ableitung dieser Funktion gleich der Ableitung der Elementarfunktion multipliziert mit der Konstanten.	$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Summenregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus der Summe zweier Funktionen. Dann ist die Ableitung der Funktion gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Funktionen.	$f(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Neue Regeln:

Produktregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus dem Produkt zweier Einzelfunktionen. Dann wird die Ableitung wie folgt gebildet:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Anmerkung: Der Beweis ist etwas aufwendiger, deshalb wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

Beispiele:

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \qquad u(x) = x^2 \qquad v(x) = x^3$$

$$\Rightarrow u'(x) = 2x \qquad v'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = \underline{\underline{5x^4}}$$

Quotientenregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus den Quotienten zweier Funktionen u(x) und v(x). Dann wird die Ableitung der Funktion wie folgt gebildet:	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Der Beweis erfolgt mittels Produktregel

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow u(x)=f(x)\cdot v(x)$$

$u'(x)=f'(x)\cdot v(x)+f(x)\cdot v'(x)$ auflösen nach $f'(x)$:

$f'(x)=\dfrac{u'(x)-f(x)\cdot v'(x)}{v(x)}$ für $f(x)$ wird $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ eingesetzt:

$$f'(x)=\frac{u'(x)-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x)}{v(x)}=\frac{\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)}}{v(x)}=\underline{\underline{\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}}$$

Beispiele:

$$f(x)=\frac{x}{x+2} \quad u(x)=x \quad v(x)=x+2$$

$$\Rightarrow u'(x)=1 \quad v'(x)=1 \quad [v(x)]^2=(x+2)^2$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\underline{\underline{\frac{2}{(x+2)^2}}}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+x^3}{x^4} \quad u(x)=2x^2+x^3 \quad v(x)=x^4$$

$$\Rightarrow u'(x)=4x+3x^2 \quad v'(x)=4x^3 \quad [v(x)]^2=x^8$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{\left(4x+3x^2\right)\cdot x^4-\left(2x^2+x^3\right)\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$=\frac{4x^5+3x^6-8x^5-4x^6}{x^8}=\frac{-x^6-4x^5}{x^8}=\frac{-x^5(x+4)}{x^8}=\underline{\underline{-\frac{x+4}{x^3}}}$$

Kettenregel	
Sind in einer Funktion die Terme mit der Variablen x so zusammengefasst, dass eine übergeordnete Variable z entsteht, so kann diese Funktion als Funktion einer Funktion betrachtet werden. (Funktionskette). Dann ist die Ableitung dieser Funktionskette gleich der äußeren Ableitung multipliziert mit der inneren Ableitung.	$f(x)=f\left[z(x)\right]$ $\Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

Anmerkung: Der Beweis ist etwas aufwendiger, deshalb wird an dieser Stelle darauf verzichtet

Beispiele	$f(x) = \left(x^2+2\right)^2$ Substitution: $z(x) = x^2+2 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$ $f'(x) = f'(z)\cdot z'(x) = 2z\cdot 2x = 2\left(x^2+2\right)\cdot 2x = \underline{\underline{4x^3+8x}}$

Zusammenfassung:	
Differenzenquotient: (Sekantensteigung oder mittlere Änderungsrate)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Differetialquotient: (Tangentensteigung oder momentane Änderungsrate)	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Konstantenregel:	$f(x) = c\cdot u(x)$ mit $c = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = c\cdot u'(x)$ oder die Kurzform: $\boxed{f' = c\cdot u'}$
Summenregel:	$f(x) = u(x)+v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x)+v'(x)$ oder die Kurzform: $\boxed{f' = u'+v'}$
Produktregel:	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ oder die Kurzform: $\boxed{f' = u'\cdot v+u\cdot v'}$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$ oder die Kurzform: $\boxed{f' = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$
Kettenregel:	$f(x) = f\left[z(x)\right]$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

Ableitung weiterer Funktionenklassen

	Funktionsgleichung	Ableitungsfunktionsgleichung
Zusammenstellung der Ableitungsfunktionen weiterer Funktionenklassen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Beispiele:

$f(x) = x \cdot e^x$ Produktregel: $u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = x\,;\, u' = 1;\, v = e^x\,;\, v' = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$

$f(x) = 3\ln x$ Konstantenregel: $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$ Produktregel: $u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = x^2\,;\, u' = 2x\,;\, v = \ln x\,;\, v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ Kettenregel: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2}$ $f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$ $\Rightarrow$ $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$

$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ Summenregel: $u(x) = 3\cos(x)$ $v(x) = -2\sin(x)$

$\Rightarrow u'(x) = -3\sin(x)$ $v'(x) = -2\cos(x)$

$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3\sin(x) - 2\cos(x)}}$