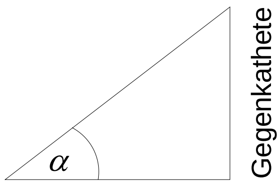
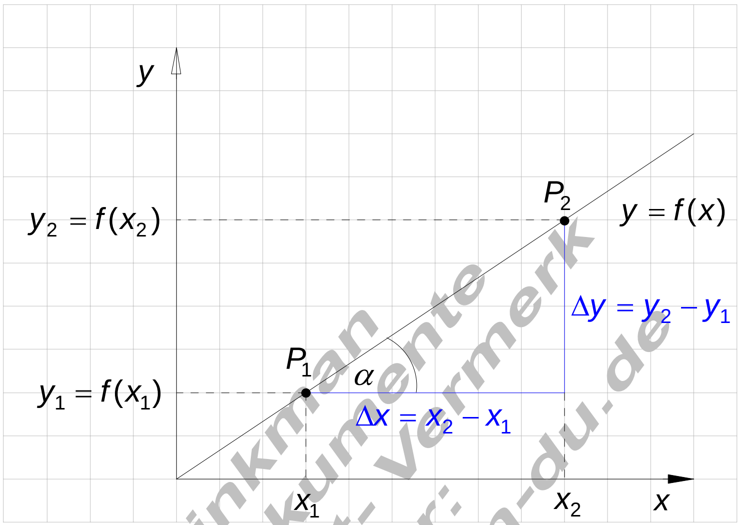
Zusammenfassung:
Von der Sekantensteigung über die Tangentensteigung zur Steigungsfunktion

Die Steigung einer Geraden.

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$





Steigungsformel für eine Gerade:

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad \text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Beispiel:

Die Punkte $P_0(2|3)$ und $P_1(5|7)$ liegen auf einer Geraden.

mit $x_0 = 2$ und $f(x_0) = f(2) = 3$

sowie $x_1 = 5$ und $f(x_1) = f(5) = 7$ ist die Steigung der Geraden:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{7 - 3}{5 - 2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Es war $\Delta x = x_1 - x_0$

Wir stellen diese Gleichung nach x_1 um.

$\Delta x = x_1 - x_0 \;|+ x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$

In der Steigungsformel ersetzen wir nun

$f(x_1)$ durch $f(x_0 + \Delta x)$ und $x_1 - x_0$ durch Δx

Damit sieht nun die Steigungsformel wie folgt aus:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Diese Formel nennen wir Differenzenquotient.

Wir überprüfen die Gültigkeit dieser Formel mit obigem Beispiel.

$P_0(2|3)$ und $P_1(5|7)$ $x_0 = 2$ und $\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3$

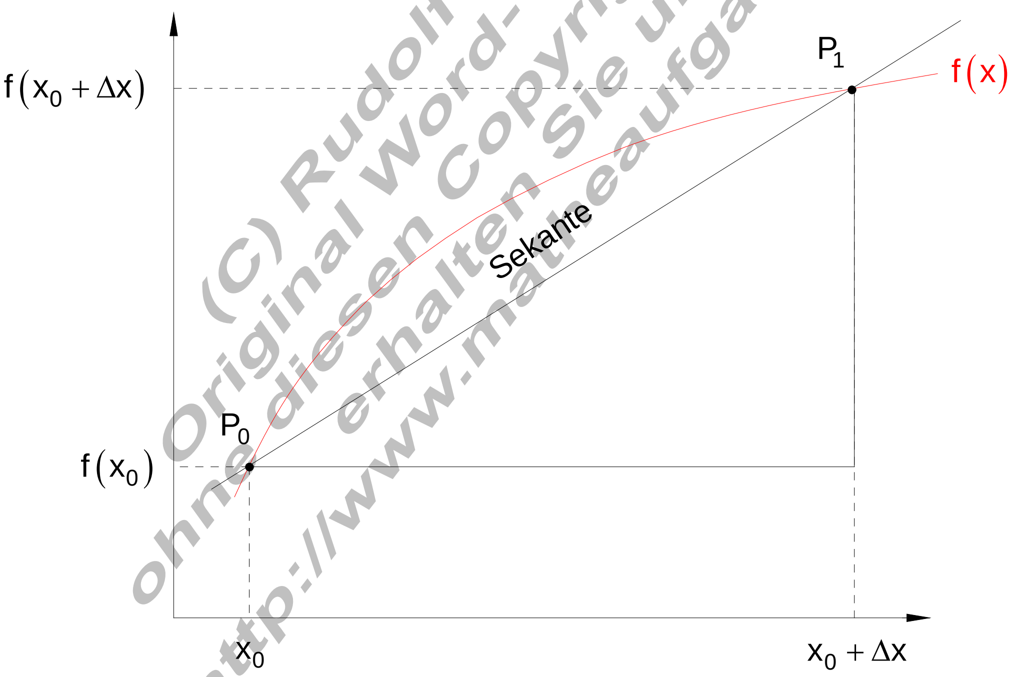
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3)-f(2)}{3} = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{7-3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Die Steigung einer Geraden lässt sich also auch mit dem Differenzenquotienten bestimmen.

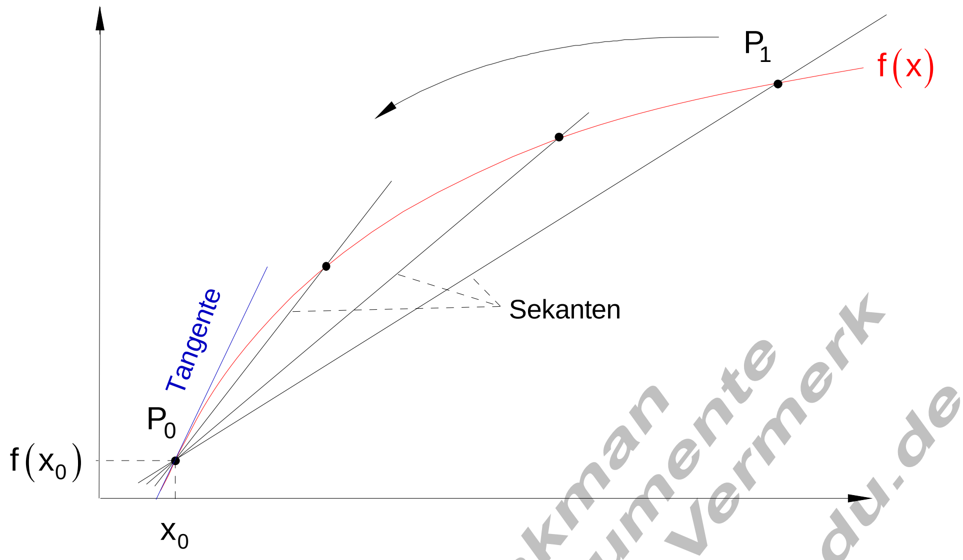
Sekantensteigung und Tangentensteigung.

Problem:
Wie groß ist die Steigung des Graphen einer beliebigen Funktion f(x) im Punkt P_0 ?

Die Sekantensteigung ist die mittlere Steigung zwischen den Punkten P_0 und P_1.



Was geschieht mit der Sekante, wenn wir den Punkt P_1 immer weiter in Richtung P_0 bewegen?



Die Sekante schmiegt sich immer mehr dem Graphen von f(x) an.
Wenn P_1 auf P_0 trifft, gibt es keine Sekante mehr. Sie ist dann zur Tangente geworden.

Die Tangente ist eine Gerade, die den Graphen von f(x) im Punkt P_0 berührt.
Per Definition ist die Steigung eines Graphen in einem Punkt P_0 gleich der Steigung der Tangente an dem Graphen in diesem Punkt.

Differenzenquotient, Differentialquotient Ableitung und Steigungsfunktion.

Um die Steigung eines Graphen f(x) an der Stelle x_0 also im Punkt $P_0(\,x_0 \mid f(x_0)\,)$ zu berechnen, lässt man in der Formel für die Sekantensteigung das „delta x" immer kleiner werden, was einer Verschiebung des Punktes P_1 in Richtung P_0 entspricht.

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (\text{Differenzenquotient})$$

Die Steigung des Graphen von $f(x)$ an der Stelle x_0 erhält man über die

$$\text{Grenzwertbildung} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (\text{Differentialquotient})$$

Grenzwertbildung bedeutet „delta x" strebt gegen Null, wird also beliebig klein ohne exakt Null zu werden. Würde man für „delta x" den Wert Null einsetzen, so entstünde ein undefinierter Ausdruck.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{0} = \frac{0}{0} \text{ undefiniert}$$

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$

heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und ist ein Maß für die Steigung von $f(x)$ an der Stelle x_0

Ableitungsbeispiel:

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^2$ Gesucht wird die Ableitung an der Stelle $x = x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

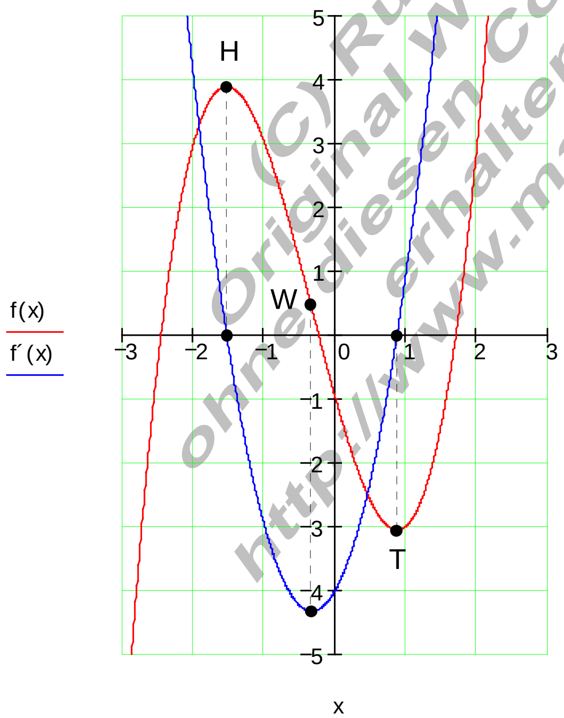
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}$$

Da für $f(x) = x^2$ die Stelle $x = x_0$ beliebig gewählt werden kann, gilt für diese Funktion:

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ (Ableitungsfunktion)

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\qquad$ $f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



Statt Ableitungsfunktion f’(x) sagt man auch Steigungsfunktion, da diese Funktion für jeden Funktionswert x die Steigung der abgeleiteten Funktion an der Stelle x angibt.

Nebenstehend ist der Graph einer Funktion, sowie der ihrer Ableitungsfunktion in einem Koordinatensystem dargestellt.

Beachten Sie:
An den Extremstellen (Hochpunkt, Tiefpunkt) hat die Ableitungsfunktion jeweils den Wert Null.

An der Wendestelle (W) hat die Ableitungsfunktion einen Extremwert.