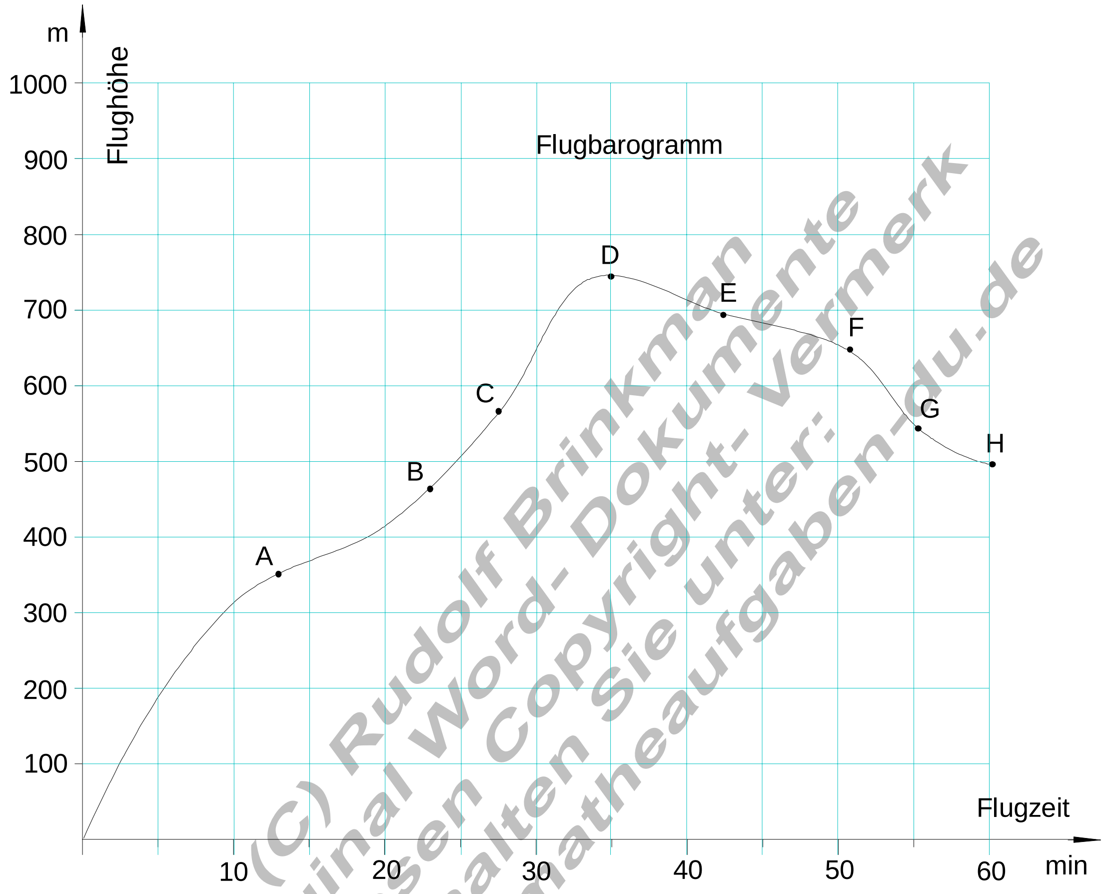
Steigung und Tangente

Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt

In Segelflugzeugen sind häufig Flugschreiber eingebaut, die die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugzeit automatisch aufzeichnen.



Aufgabe:

a) Vergleichen Sie die Steigung des Graphen im Punkt A mit der Steigung des Graphen im Punkt B.
   Vergleichen Sie entsprechend die Steigungen des Graphen in den Punkten E und G.

b) Erklären Sie, warum man von der Steigung in einem Punkt sprechen muss.

c) Versuchen Sie ein Maß für die Steigung des Graphen in einem Punkt zu definieren und bestimmen Sie aus der Zeichnung die Steigung im Punkt A und im Punkt B.

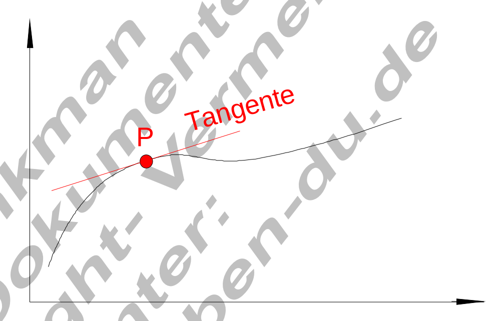
Lösung:

a)	Die Steigung des Graphen im Punkt B ist größer als die Steigung des Graphen im Punkt A. Die Steigungen in den Punkten E und G sind negativ. Dabei ist die Steigung im Punkt E betragsmäßig kleiner als im Punkt G.
b)	Die Steigung eines Graphen ist nicht überall gleich. Deshalb muss der Punkt angegeben werden in dem die Steigung betrachtet wird. Lediglich die Steigung einer Geraden ist überall gleich. Man kann daher von der Steigung einer Geraden sprechen.

c)	Folgende Definition scheint vernünftig zu sein:

Definition:

Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt P ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt.



Hierbei ist eine Tangente zunächst anschaulich als Gerade definiert, die sich dem Graphen in einer Umgebung des Berührungspunktes möglichst gut anschmiegt.

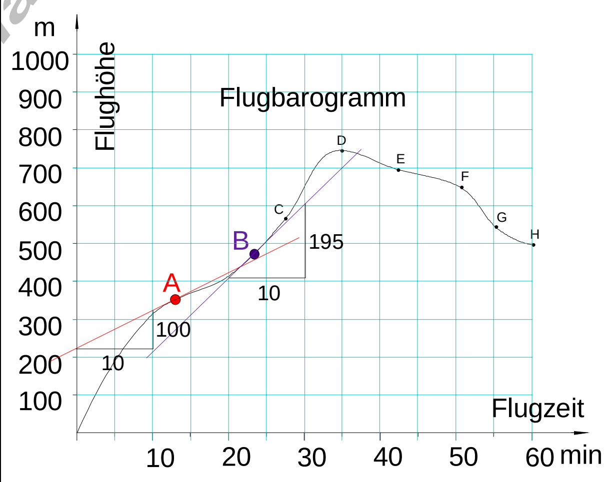
Durch diese Definition ist die Steigung eines Graphen in einem Punkt zurückgeführt auf die Steigung einer Geraden.

Zur Bestimmung der Steigung des Graphen in den Punkten A und B zeichnen wir jeweils eine Gerade (Tangente) durch diese Punkte, die sich dem Graphen möglichst gut anpasst.

Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks lässt sich die Steigung grob bestimmen:

Steigung bei A: $\frac{100\text{ m}}{10\text{ min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$

Steigung bei B: $\frac{195\text{ m}}{10\text{ min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$



Für unser Beispiel hat die Steigung in einem bestimmten Punkt die Bedeutung der momentanen Höhenänderungsrate oder der Steiggeschwindigkeit.

Punkt A: Flugzeit ca. 12,5 min, Steiggeschwindigkeit ca. 10 m / min.
Punkt B: Flugzeit ca. 23,0 min, Steiggeschwindigkeit ca. 19,5 m / min.

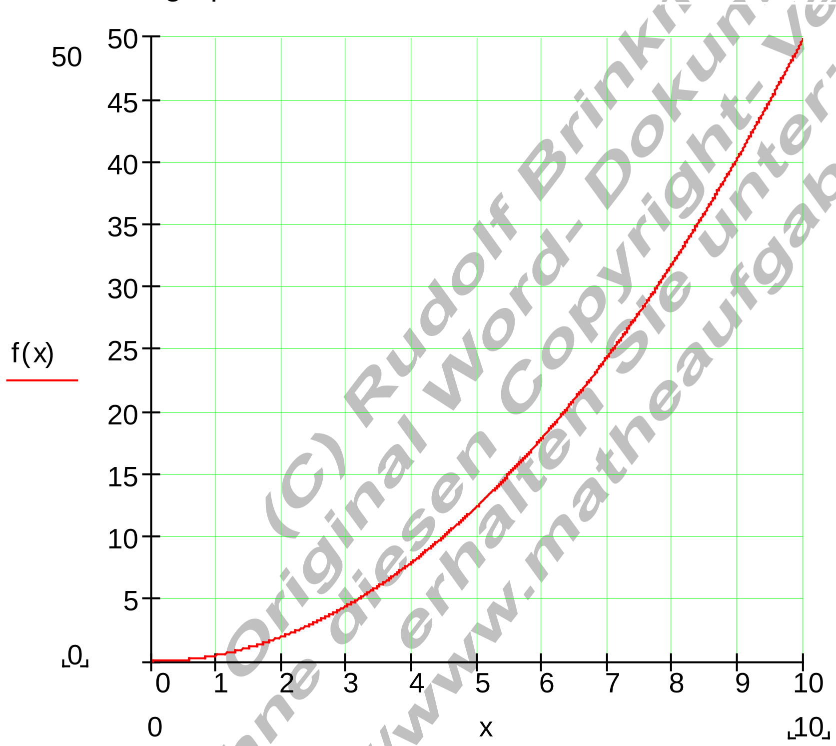
Die Tangente ist bisher nur anschaulich als eine Gerade definiert, die sich dem Graphen in einer Umgebung des Berührungspunktes besonders gut anschmiegt. Deswegen konnte die Steigung des Graphen in den Punkten A und B auch nur näherungsweise bestimmt werden. Das ist für die Praxis unbefriedigend.

Berechnung der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt.

Bekanntlich erhöht ein Zug, der aus einem Bahnhof herausfährt nur langsam seine Geschwindigkeit. Der zurückgelegte Weg (Entfernung vom Bahnhof) wird dabei immer größer. Die Entfernung vom Bahnhof hängt also von der Zeit ab.
Dieser Vorgang kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$s = f(x) = 0{,}5x^2$ mit x als Zeit in Sekunden und s als Weg in m

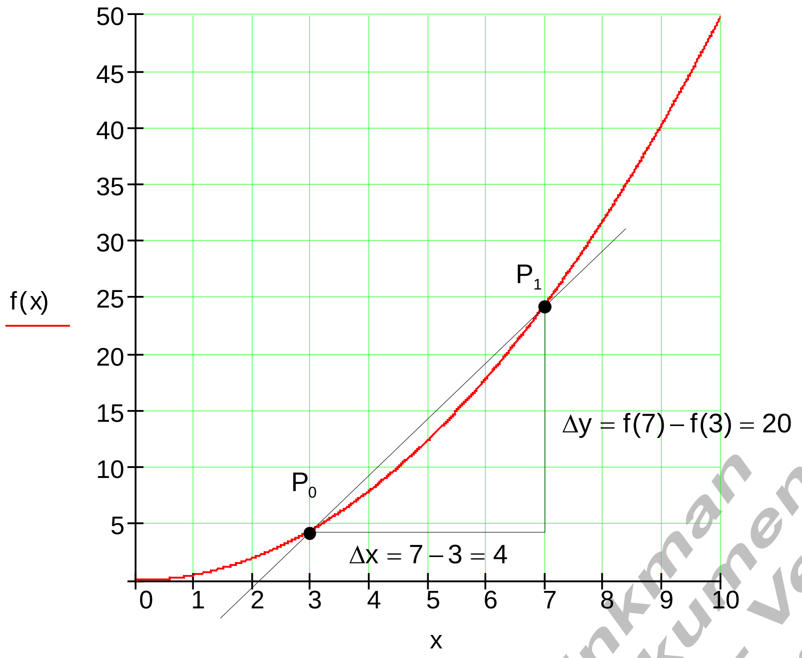
Der Funktionsgraph:



Es soll nun die mittlere Änderungsrate (mittlere Steigung) zwischen der 3. und der 7. Sekunde berechnet werden. Dazu zeichnen wir die entsprechende Sekante ein und berechnen deren Steigung.

Des weiteren soll die Änderungsrate zwischen der 3. und der 4. Sekunde berechnet werden.

Wie groß ist die Änderungsrate in der 3. Sekunde?
Führen Sie Ihre Berechnung der mittleren Steigung so aus, dass der Abstand zwischen den Punkten P_1 und P_0 immer kleiner wird, indem Sie den Punkt P_1 auf den Punkt P_0 zu bewegen.



Zwischen der 3. und 7. Sekunde ist die

mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24{,}5 - 4{,}5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$

Zwischen der 3. und 4. Sekunde ist die

mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4{,}5}{4 - 3} = \frac{3{,}5}{1} = 3{,}5$

Näherungsrechnung für die 3. Sekunde:

Intervall $[3\,;x]$	$[3\,;4]$	$[3\,;3{,}1]$	$[3\,;3{,}01]$	$[3\,;3{,}001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

Die Rechnung zeigt, wenn wir den Punkt P_1 näher an den Punkt P_0 wandern lassen, nähert sich der Wert der Änderungsrate (Steigung) immer mehr dem Wert 3.

Wir erhalten so einen Wert, der der momentanen Änderungsrate immer näher kommt.
Betrachten wir die physikalischen Einheiten in unserem Beispiel, so gilt für die Änderungsrate m/s. Das ist die Einheit für die Geschwindigkeit.
Das bedeutet, die Änderungsrate in einem Weg – Zeit – Diagramm entspricht der Geschwindigkeit.

Mathematisches Verfahren zur Berechnung der momentanen Änderungsrate.

mittlere Änderungsrate im Intervall $[3\,;\Delta x]$ für $f(x) = 0{,}5x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0{,}5(3+\Delta x)^2 - 0{,}5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0{,}5\left[9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right] - 0{,}5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 9 + 3\Delta x + 0{,}5(\Delta x)^2 - 0{,}5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0{,}5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0{,}5\Delta x$$ mittlere Änderungsrate

Macht man nun Δx immer kleiner, wir sagen Δx strebt gegen Null $(\Delta x \to 0)$

dann strebt der Wert der mittleren Änderungsrate $3 + 0{,}5\Delta x$ gegen 3.

Das ist nun die momentane Änderungsrate von $f(x)$ an der Stelle $x = 3$.

Wir schreiben: für $\Delta x \to 0$ gilt $3 + 0{,}5\Delta x \to 3$

oder

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 + 0{,}5\Delta x) = 3$$