Beispiel einer Kostenrechnung

Aufgabe 1:

Betriebliche Daten:

Gesamtkosten $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Fixkosten: K_f (x)= 420 GE

variable Stückkosten: $k_v(x)$ = 300 GE/ME

bei einer Ausbringung von x = 10 ME

Betriebsminimum $k_v^{'}$ (x) = 200 GE

bei einer Ausbringung von x = 5 ME

a) Kostenfunktionsgleichung aufstellen

b) Bei 15 ME decken die Erlöse die Kosten (E(x) = K(x)) bestimmen Sie unter der Voraussetzung das eine lineare Erlösfunktion gegeben ist, den Absatzpreis

c) Bestimmen Sie die Gewinnzone

d) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum

Lösung:

a) Aufstellen der Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Fixkosten: $K_f(x) = K(0) = d = 420 \quad \Rightarrow \underline{\underline{d = 420}}$

variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = ax^2 + bx + c$

$k_v(10) = 100a + 10b + c = 300$ $\quad$ <u>Gleichung I</u>

Betriebsminimum $K^{'}(x) = 3ax^2 + 2bx + c = k_v(x)$

$K^{'}(5) = 75a + 10b + c = 200$ $\quad$ <u>Gleichung II</u>

$k_v(5) = 25a + 5b + c = 200$ $\quad$ <u>Gleichung III</u>

a	b	c		
100	10	1	300	vertausche
75	10	1	200	I mit III
25	5	1	200	
25	5	1	200	
75	10	1	200	$II - 3 \cdot I$
100	10	1	300	$III - 4 \cdot I$
25	5	1	200	
0	–5	–2	–400	$\cdot(-1)$
0	–10	–3	–500	
25	5	1	200	
0	5	2	400	
0	–10	–3	–500	$III + 2 \cdot II$
25	5	1	200	
0	5	2	400	
0	0	1	300	

Zurückrechnen:

$\underline{\underline{c = 300}}$

$5b + 2 \cdot 300 = 400 \Rightarrow \underline{\underline{b = -40}}$

$25a + 5 \cdot (-40) + 300 = 200 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

Kostenfunktion:

$\underline{\underline{K(x) = 4x^3 - 40x^2 + 300x + 420}}$

b) Absatzpreis:

$E(x) = p \cdot x$

$E(15) = 15p = K(15) \Rightarrow p = \dfrac{K(15)}{15}$

$p = \dfrac{4 \cdot 15^3 - 40 \cdot 15^2 + 300 \cdot 15 + 420}{15} = \dfrac{9420}{15} = \underline{\underline{628}}$

Der Absatzpreis beträgt $\underline{\underline{628\text{ GE}}}$

c) Gewinnzone:

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = 628x - 4x^3 + 40x^2 - 300x - 420$

$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$

Die Gewinnzone befindet sich dort, wo gilt: $G(x) > 0$

1. Nullstelle: da für 15 ME gilt $E(x) = K(x) \Rightarrow G(15) = E(15) - K(15) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{(15\,|\,0)}}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(-4x^3 + 40x^2 + 328x - 420\right) : (x - 15) = \underline{\underline{-4x^2 - 20x + 28}} \\
\underline{-\left(-4x^3 + 60\right)} \\
\qquad -20x^2 + 328x \\
\qquad \underline{-\left(-20x^2 + 300x\right)} \\
\qquad\qquad 28x - 420 \\
\qquad\qquad \underline{-\left(28x - 420\right)}
\end{array}$$

$-4x^2 - 20x + 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow p = 5 \quad q = -7$

$x_{1/2} = -\dfrac{5}{2} \pm \sqrt{\dfrac{25}{4} + \dfrac{28}{4}} = -\dfrac{5}{2} \pm \sqrt{\dfrac{53}{4}} \Rightarrow x_1 \approx 1{,}14 \quad x_2 \approx -6{,}14$

Gewinnzone liegt im Intervall $\underline{\underline{I = \left\{ x \middle| -\dfrac{5}{2} + \sqrt{\dfrac{53}{4}} \le x \le 15 \right\}_{\mathbb{R}}}}$

d) Gewinnmaximum

$$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$$

$$G^{'}(x) = -12x^2 + 80x + 328$$

$$G^{''}(x) = -14x + 80$$

$$G^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 80x + 328 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{82}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{20}{3} \quad q = -\frac{82}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{246}{9}} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{346}{9}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}} \approx 9{,}53 \quad x_2 = \frac{10}{3} - \sqrt{\frac{346}{9}} \approx -2{,}87$$

$$G(x_1) = G\left(\frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}}\right) \approx 2876{,}6 \Rightarrow \text{Gewinnmaximum bei } \underline{\underline{(9{,}53ME \mid 2879{,}6GE)}}$$