Achsenschnittpunkte von e- Funktionen und Exponentialgleichungen

Einführungsbeispiele

Beispiel 1:
Zu bestimmen sind die Achsenschnittpunkte von

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

Den Schnittpunkt mit der y – Achse findet man über den Ansatz:

$y_s = f(0)$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102 \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102\right)}}$$

Schnittpunkte mit der x – Achse findet man über den Ansatz:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

$\Rightarrow$ keine Sschnittpunkte, denn $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Schnittpunkte mit der x- Achse bestimmt man über die Nullstellen von f (x).
Die Funktion f (x) hat keine Nullstelle, da es sich bei ihr um eine in x- Richtung verschobene und in x- Richtung gestreckte e- Funktion handelt. Sie ist außerdem noch an der y- Achse und an der x- Achse gespiegelt.

Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{u(x)}$ mit $a \in \mathbb{R}$
haben lediglich einen Schnittpunkt mit der y – Achse aber keine Nullstellen.
Denn $e^{u(x)} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beispiel 2:
Zu bestimmen sind die Achsenschnittpunkte von

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

Schnittpunkt mit der y – Achse : $y_s = f(0)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 = -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08 \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08\right)}}$$

Um mögliche Schnittpunkte mit des x- Achse zu bestimmen , ist der Aufwand etwas größer. Dazu sind die Nullstellen von f (x) zu bestimmen.

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} - 2\cdot e^{x+1}$$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} - 2\cdot e^{x+1} = 0}_{\text{Exponentialgleichung}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} - 2\cdot e^{x+1} = 0 \,|+2\cdot e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} = 2\cdot e^{x+1} \,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1} = 4\cdot e^{x+1} \,|:e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = 4 \,|\text{Potenzgesetz}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)} = 4 \,|\text{Exponent vereinfachen}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = 4 \,|\text{logarithmieren } \ln(\ )$$

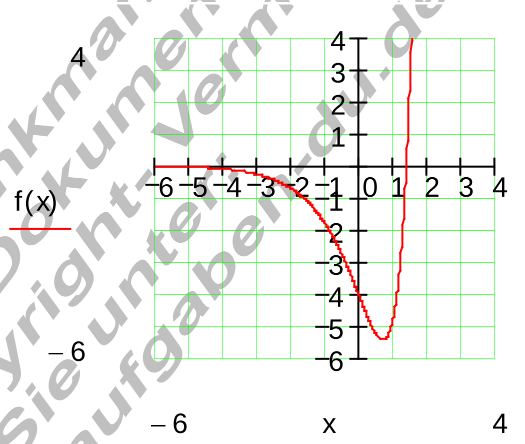
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(4) \,|\text{Logarithmengesetz}$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\ln(4) \approx 1{,}39 \,|\, 0\right)}}$$

Um die Schnittpunkte mit der x- Achse, also die Nullstellen einer Exponentialfunktion zu bestimmen, ist es in vielen Fällen erforderlich, eine **Exponentialgleichung** zu lösen.

Zusätzlich zu den bekannten Operationen, die zur Lösung von Gleichungen verwendet werden, ist es bei der Lösung von Exponentialgleichungen nötig, die **Potenz- und die Logarithmengesetze** zu kennen.



Potenz- und Logarithmengesetze

Die wichtigsten Potenz- und Logarithmengesetze zusammengefasst.

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Definition des Logarithmus:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$

Logarithmengesetze zur Basis e

$\ln(b\cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln\left(b^c\right) = c\cdot\ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

Im Zusammenhang mit e- Funktionen haben Potenzen mit der Basis e und **natürliche Logarithmen** eine besondere Bedeutung.

Training POT_LOG_01:

Anwendung der Potenz- und Logarithmengesetze.
Formen Sie folgende Potenz- und Logarithmenterme unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze um.

1.	$\left(e^x + e^{-x}\right)^2$	2.	$\left(e^x - e^{-x} + 5\right) \cdot e^x$
3.	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$	4.	$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$
5.	$\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$	6.	$e^{\ln(2t)} - 2t \cdot e^{\ln(2)}$
7.	$\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	8.	$\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$
9.	$e^{\ln(t)+1}$	10.	$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}t\right)}$

Lösungsmethoden für Exponentialgleichungen

Lösung mittels Exponentenvergleich

$e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$

ist eine Exponentialgleichung, die nach folgender Umformung

$e^{2x+4} = e^{x-1}$

über den Exponentialvergleich gelöst werden kann.

$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x + 4 = x - 1 \Leftrightarrow 2x + 4 = x - 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = -5}}$

Probe:

$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$

Eine Lösung mittels **Exponentenvergleich** ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben. Das ist leider jedoch nicht immer möglich, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Lösung mittels Logarithmieren

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \,|\, +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \,|\cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

Hier ist kein Exponentialvergleich möglich.
Der Ansatz erfolgt über Logarithmieren:

$$\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.
Jedoch Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Lösung mittels Substitution

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \qquad \text{Substitution}: e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$

$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit der Lösung

$u_1 = 1; u_2 = 4$

Rücksubstitution und Lösung durch Logarithmieren

$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(1) = 0}}$

$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(4)}}$

Ausführliche Beispiele zu Exponentialgleichungen

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid :2$ Lösung durch Logarithmieren $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3\cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + x\cdot\ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$	Probe: $2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$

$x\cdot e^{x} - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(e^{x} - 3\right) = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $e^{x} - 3 = 0 \mid +3$ Lösung durch Logarithmieren $\Leftrightarrow e^{x} = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x\cdot\ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$	Probe: $x_1 = 0$ $0\cdot e^{0} - 3\cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0\cdot 1 - 3\cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0\ (w)$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3)\cdot e^{\ln(3)} - 3\cdot\ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3)\cdot 3 - 3\cdot\ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3\cdot\ln(3) - 3\cdot\ln(3) = 0\ (w)$

$e^{2x}-\frac{17}{2}e^x+4=0$ Substitution: $u=e^x \Rightarrow u^2-\frac{17}{2}u+4=0$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p=-\frac{17}{2};\ q=4;$

$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{289}{16}-\frac{64}{16}=\frac{225}{16}\Rightarrow\sqrt{D}=\frac{15}{4}$

$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$

$u_1=\frac{17}{4}+\frac{15}{4}=\frac{32}{4}=8$

$u_2=\frac{17}{4}-\frac{15}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Rücksubstitution

$u_1=8\Leftrightarrow e^x=8\,|\ln(\ )$

$\Leftrightarrow\ln\left(e^x\right)=\ln(8)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(8)}}$

$u_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\,|\ln(\ )$

$\Leftrightarrow\ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x\cdot\ln(e)=\ln(1)-\ln(2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=-\ln(2)}}$

$\frac{2}{1+e^x}=-2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}\,|:2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+e^x}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$

$\Leftrightarrow\frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}\,|\cdot\left(1+e^x\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+e^x=-\left(e^x-4\right)\quad\Leftrightarrow\quad 1+e^x=-e^x+4\,|+e^x-1$

$\Leftrightarrow 2e^x=3\,|\ln(\ )\quad\Leftrightarrow\quad\ln\left(2\cdot e^x\right)=\ln(3)$

$\Leftrightarrow\ln(2)+\ln\left(e^x\right)=\ln(3)\quad\Leftrightarrow\quad\ln(2)+x\cdot\ln(e)=\ln(3)$

$\Leftrightarrow\ln(2)+x=\ln(3)\,|-\ln(2)\quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(3)-\ln(2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$

$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

Rücksubstitution

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \mid -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2 + \ln(2)}}$

$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x+2 = 0 \mid -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p = -3\,;\, q = 2\,;$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Training Expgl1: Exponentialgleichungen

Lösen Sie die Exponentialgleichungen mit den von Ihnen bekannten Methoden

1.)	$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0$	2.)	$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1$
3.)	$\frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0$	4.)	$(3+2x)e^{x-1} = 0$
5.)	$-2x^2e^{-x+2} = 0$	6.)	$-\frac{1}{5}e^{x} - 1 + 10e^{-x} = 0$
7.)	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$	8.)	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$
9.)	$\frac{2x}{e^{x}+1} = 0$	10.)	$(2-e^{x})^2 = (e^{x}-3)^2$

Achsenschnittpunkte berechnen

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2-x} - 2$$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^2 - 2 \approx 1{,}7$$

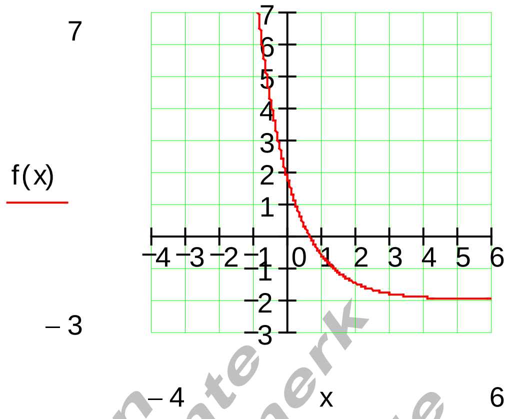
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{1}{2} \cdot e^2 - 2 \approx 1{,}7\right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{2-x} - 2 = 0 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{2-x} = 2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow e^{2-x} = 4 \mid \ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow 2 - x = \ln(4) \Leftrightarrow x = 2 - \ln(4)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(x = 2 - \ln(4) \approx 0{,}614 \mid 0\right)}}$$



$$f(x) = e^{2x} - 6 \cdot e^x + 5$$

$$y_s = f(0) = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \cdot e^x + 5 = 0$$

Substitution : $e^x = u \Rightarrow e^{2x} = u^2$

$$u^2 - 6u + 5 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$u_1 = 5; u_2 = 1$$

$$u_1 = 5 \Rightarrow e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$$

$$u_2 = 1 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$$

$$\underline{\underline{P_{x1}\left(\ln(5) \approx 1{,}61 \mid 0\right); P_{x2}\left(\ln(1) = 0 \mid 0\right)}}$$