Exponentialfunktionen und die e- Funktion

Einführung

Bei den bisher betrachteten Funktionen traten Exponenten nur als Zahlen auf.

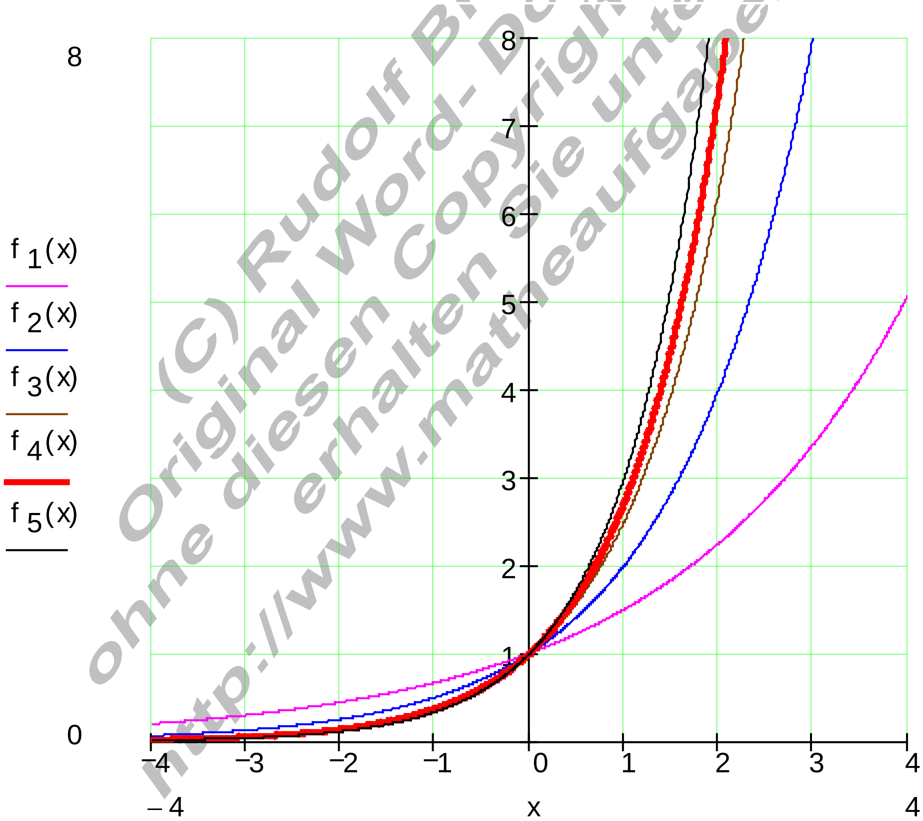
Potenzfunktion: $f(x) = a \cdot x^q$ mit $q \in \mathbb{R}$ Beispiel: $f(x) = 2x^3$

Funktionen mit positiver Basis, bei denen die unabhängige Variable x als Exponent auftritt heißen **Exponentialfunktionen.**

Beispiele für Exponentialfunktionen:

$f_1(x) = 1{,}5^x \qquad f_2(x) = 2^x \qquad f_3(x) = 2{,}5^x \qquad f_4(x) = e^x \qquad f_5(x) = 3^x$

Die Zahlen 1,5 2 2,5 e und 3 bilden die Basen und x den Exponenten. Die Basis e ist als Eulersche Zahl bekannt und hat näherungsweise den Wert 2,71828. Sie wird bei weiteren Betrachtungen noch eine wichtige Rolle spielen.



Graphen von Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Basen

Der in farbiger Darstellung rot erscheinende stark hervorgehobene Graph gehört zu der Exponentialfunktion mit der Basis e, auch **e- Funktion** genannt.

Auffälligkeiten:
Alle im Koordinatensystem dargestellten Graphen schneiden die y- Achse im Punkt P_y (0 | 1).

Für große negative x- Werte nähern sich alle Graphen beliebig der x- Achse.
Die negative x- Achse wird in einem solchen Fall **Asymptote** genannt.
Man sagt auch, die Graphen nähern sich für große negative x- Werte asymptotisch der x- Achse.
In mathematischer Schreibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
Für große positive x- Werte wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen.
In mathematischer Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$

Alle Funktionswerte der im Koordinatensystem dargestellten Graphen sind positiv, da für Exponentialfunktionen nur positive Basen zugelassen werden.
Das bedeutet es gibt in diesem Fall keine Nullstellen.

Die Funktion $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a

Woher kommt die Zahl e?

Mit Hilfe der Zinseszinsrechnung soll die Zahl e entwickelt werden.

Dabei wird die in jeder Formelsammlung enthaltene Zinseszinsformel verwendet.

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

n : Anzahl der Zinsabschnitte
K_0 : Anfangskapital
K_n : Kapital nach n Zinsabschnitten
p : Zinsfuß in %

Das Kapital soll sich bei jährlicher Verzinsung verdoppeln.
Es ist also ein Zinsfuß von p = 100% zu wählen so dass p/100 = 1 ist.

Bei mehreren Zinsabschnitten pro Jahr, wird das Kapital mit Zinseszins mehrfach verzinst. Dabei ist der Zinsfuß durch die Anzahl der Zinsabschnitte zu teilen.

Kapitalverzinsung nach einem Jahr mit p = 100% $\Rightarrow \frac{p}{100} = 1$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 = K_0\left(1+1\right)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **halbjähriger** Verzinsung mit $\frac{p}{2\cdot 100} = \frac{1}{2}$

$$K_2 = K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}25}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **monatlicher** Verzinsung mit $\frac{p}{12\cdot 100} = \frac{1}{12}$

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}61...}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **täglicher** Verzinsung mit $\frac{p}{360\cdot 100} = \frac{1}{360}$

$$K_{360} = K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2{,}7145...}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **stündlicher** Verzinsung mit $\frac{p}{8640\cdot 100} = \frac{1}{8640}$

$$K_{8640} = K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2{,}7181...}_{\approx e}}}$$

Kapitalverzinsung nach einem Jahr bei **n** Verzinsungen mit $\frac{p}{n\cdot 100} = \frac{1}{n}$

$$K_n = K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Verzinst man in jedem Moment (also unendlich viele Verzinsungen $n \to \infty$) dann erhält man nach einem Jahr ein Kapital von:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

d.h. das Kapital hat sich mit dem Faktor **e** vervielfacht.

Die meisten Taschenrechner haben eine e- Funktionstaste,
ähnlich wie die pi – Taste.
Der Zahlenwert der Eulerschen Zahl ist ein unendlich nicht periodischer Dezimalbruch.
Die Zahl e bildet die Basis der e- Funktion.

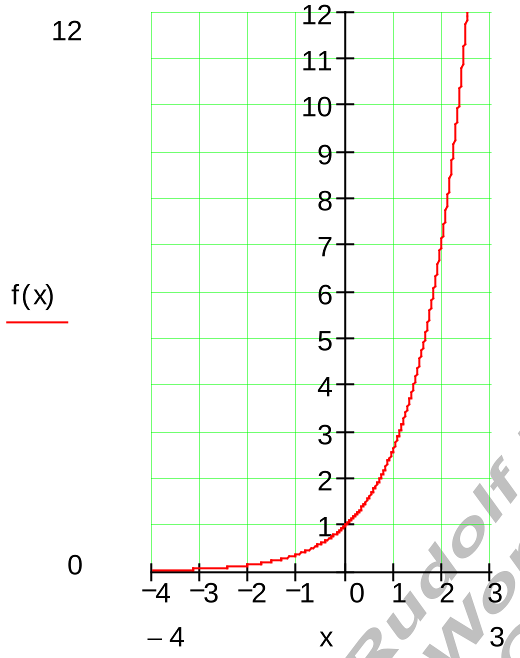
Es gilt: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Die $e-$Funktion hat die allgemeine Form $f(x) = a \cdot e^{b\cdot x}$

Der Wert von e auf 3 Stellen gerundet: e = 2,718
Der Wert von e auf 9 Stellen gerundet e = 2,718 281 828

Die Funktion $f(x) = e^x$ mit $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$ und $x \in \mathbb{R}$

heißt Exponentialfunktion zur Basis e und wird auch e – Funktion genannt.

Grundeigenschaften der e – Funktion $f(x) = e^x$



Funktionswerte:

$f(0) = 1$

$f(1) = e \approx 2{,}72$

$f(2) = e^2 \approx 7{,}39$

$f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

$f(-2) = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

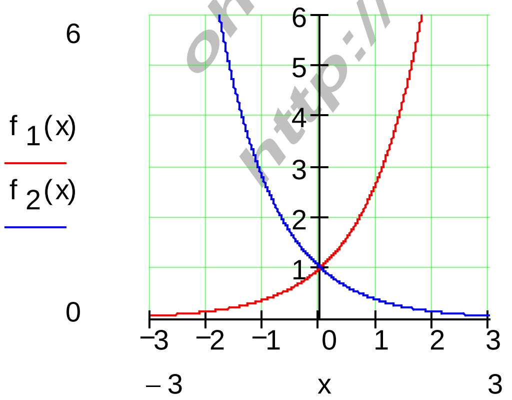
$f(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Die e- Funktion besitzt keine Nullstellen, keine Extremwerte und auch keine Wendepunkte.

Spiegelung, Verschiebung und Streckung der e- Funktion.

Ähnlich wie aus der Normalparabel durch entsprechende Operationen andere Parabeln entstehen können lassen sich aus der e- Funktion durch Verschiebung, Streckung und Spiegelung des Graphen andere Exponentialfunktionen gewinnen.

Spiegelung



Gespiegelt an der y – Achse

$f_2(x) = e^{-x}$

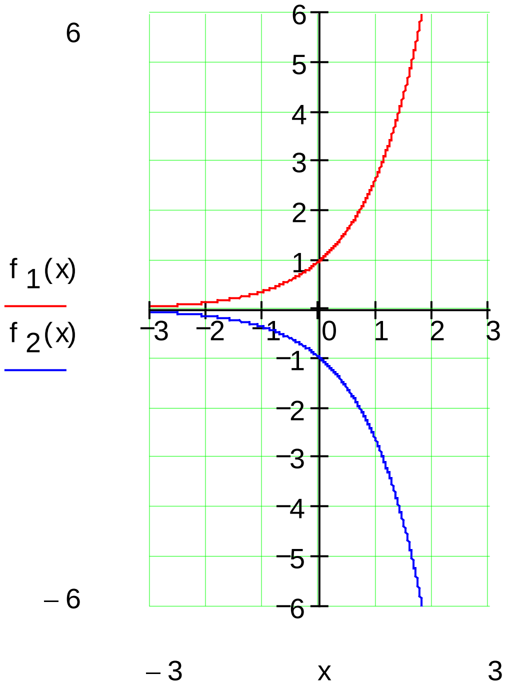
Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_2(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte



Gespiegelt an der x – Achse

$f_2(x) = -e^x$

Schnittpunkt mit der y – Achse

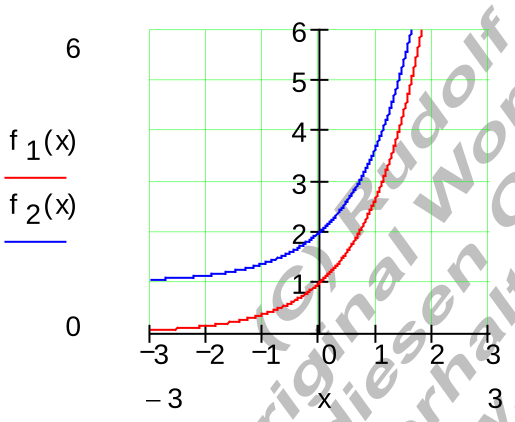
$f_2(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0\,|\,-1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(-e^x\right) = -\infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte

Verschiebung in y- Richtung



Verschiebung 1 EH nach oben

$f_2(x) = e^x + 1$

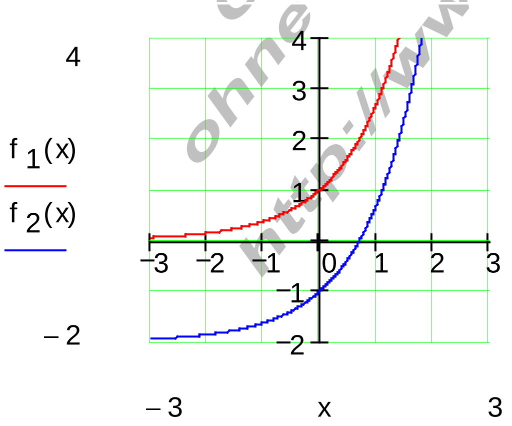
Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0\,|\,2)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x + 1\right) = 1 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x + 1\right) = \infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte



Verschiebung 2 EH nach unten

$f_2(x) = e^x - 2$

Schnittpunkt mit der y – Achse

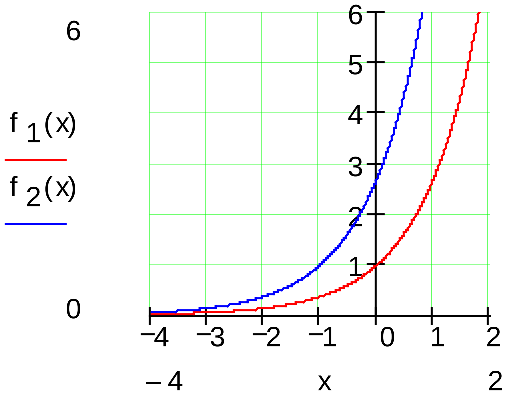
$f_2(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow P_y(0\,|\,-1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - 2\right) = -2 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - 2\right) = \infty$

Keine Extremwerte und Wendepunkte.
Nullstelle im Intervall [0 ; 1]

Verschiebung in x- Richtung



Verschiebung 1 EH nach links

$f_2(x) = e^{x+1}$

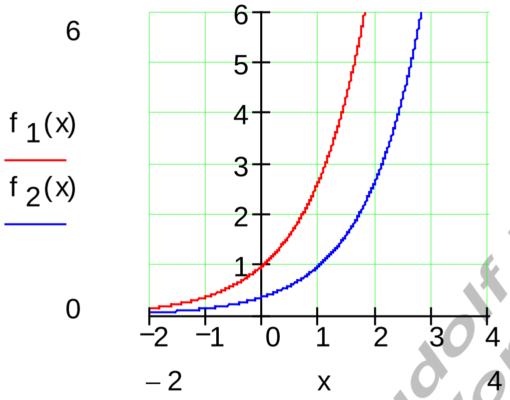
Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_2(0) = e^1 \approx 2{,}72 \Rightarrow P_y(0 \mid e \approx 2{,}72)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x+1}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x+1}\right) = \infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte



Verschiebung 1 EH nach rechts

$f_2(x) = e^{x-1}$

Schnittpunkt mit der y – Achse

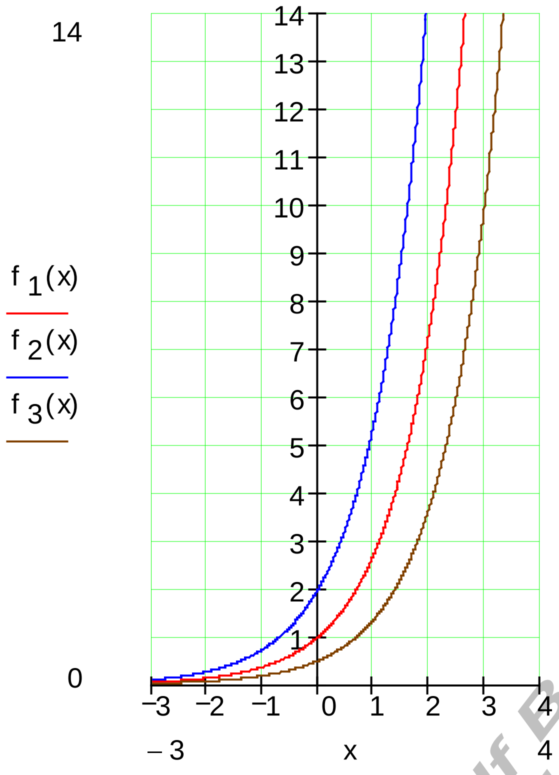
$f_2(0) = e^{-1} \approx 0{,}37 \Rightarrow P_y\left(0 \mid e^{-1} \approx 0{,}37\right)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x-1}\right) = \infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte

Streckung (Stauchung) in y- Richtung



Streckung mit dem Faktor $k = 2$

$f_2(x) = 2 \cdot e^x$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0 \,|\, 2)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \left(2 \cdot e^x\right) = \infty$

Stauchung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$

$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$

Schnittpunkt mit der y – Achse

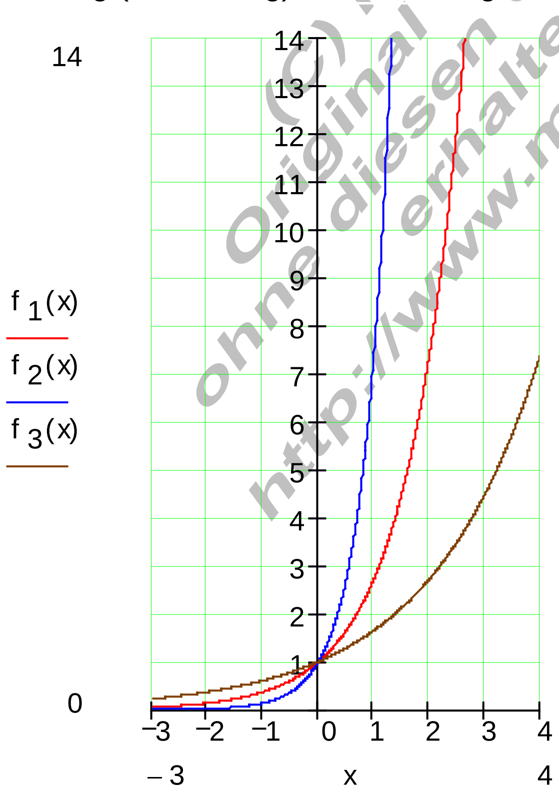
$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte

Streckung (Stauchung) in x- Richtung



Stauchung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$

$f_2(x) = e^{2 \cdot x}$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_2(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 \,|\, 1)$

Randgrenzwerte

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{2 \cdot x}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{2 \cdot x}\right) = \infty$

Streckung mit dem Faktor $k = 2$

$f_3(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Schnittpunkt mit der y – Achse

$f_3(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 \,|\, 1)$

Randgrenzwerte

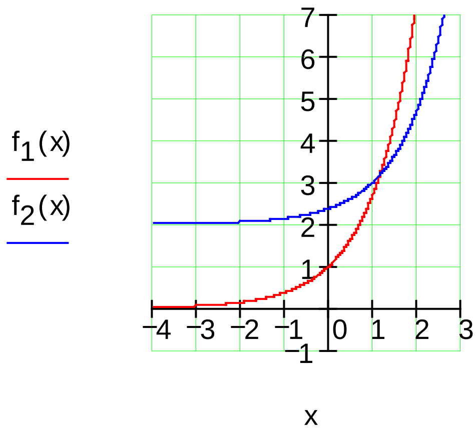
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{1}{2}x}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{\frac{1}{2}x}\right) = \infty$

Keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte

Spiegelungen, Verschiebungen und Streckungen der e- Funktion lassen sich beliebig miteinander kombinieren.

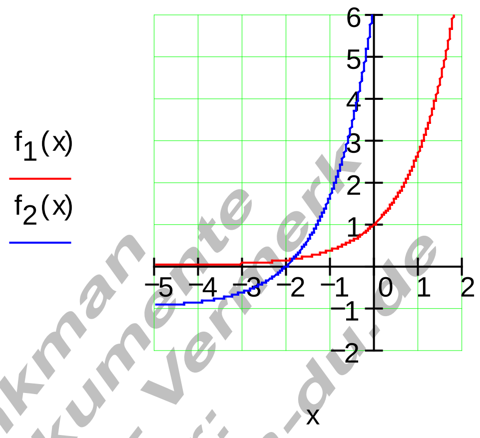
Verschiebungen auf der x – und y - Achse:

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x-1} + 2$



$f_2(x)$ entstanden aus $f_1(x)$ durch:
Verschiebung auf der x- Achse um eine Einheit nach rechts.
Verschiebung auf der y- Achse um zwei Einheiten nach oben.

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x+2} - 1$



$f_2(x)$ entstanden aus $f_1(x)$ durch:
Verschiebung auf der x- Achse um zwei Einheit nach links.
Verschiebung auf der y- Achse um eine Einheiten nach unten.

Training EFKT_01:
Graphen von e – Funktionen.
Ermitteln Sie **Verschiebungen, Spiegelung** und **Formänderung** der Grundfunktion e^x.
Zeichnen Sie jeden Funktionsgraphen und die Grundfunktion e^x in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse.
Lesen Sie an dem Graphen ab:
Grenzwerte und falls vorhanden **Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.**
Bemerkung: Berücksichtigen Sie nur die Funktionswerte, die im Intervall [-10 ; 10] liegen.

1.)	$f(x) = e^x \,;\, g(x) = e^{-x}$ für $[-4\,;4]$	2.)	$f(x) = -e^x$ für $[-5\,;3]$
3.)	$f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4\,;4]$	4.)	$f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4\,;4]$
5.)	$f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5\,;3]$	6.)	$f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4\,;4]$
7.)	$f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5\,;3]$	8.)	$f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2\,;6]$
9.)	$f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4\,;4]$	10.)	$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10\,;5]$