Wiederholung Ganzrationale Funktionen

Definition:

Eine Funktion $f(x)$ mit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

heißt <u>ganzrationale Funktion n - ten Grades</u>.

Die Zahlen a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ;.... a_2 ; a_1 ; a_0 heißen <u>Koeffizienten</u>

Beispiele:

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ (3. Grades) $f(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 7x + 5$ (4. Grades)

<u>Verlauf des Graphen</u>

Der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt.

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	Verlauf von II nach I	Verlauf von III nach I
$a_n < 0$	Verlauf von III nach IV	Verlauf von II nach IV

Beispiele:

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7$ $n = 3$ (ungerade) $\wedge\ a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7$ $n = 4$ (gerade) $\wedge\ a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9$ $n = 5$ (ungerade) $\wedge\ a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

<u>Symmetrien:</u>

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn die Funktionsgleichung nur aus geraden Exponenten besteht oder

Achsensymmetrie wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = f(x)$

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn die Funktionsgleichung nur aus ungeraden Exponenten besteht oder

Punktsymmetrie wenn für alle $x \in D$ gilt $f(-x) = -f(x)$

Bemerkung:
Unter Achsensymmetrie ist immer die Symmetrie zur y – Achse zu verstehen.
Punktsymmetrie ist die Symmetrie zum Koordinatenursprung.

Achsenschnittpunkte ganzrationaler Funktionen

Schnittpunkt mit der y – Achse $P_y(0\,|\,y_s)$: Bedingung: $y_s = f(0)$

Beispiel:

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$

$\Rightarrow P_y(0\,|\,-3)$ oder $P_y(0\,|\,f(0))$

Die y – Koordinate von P_y ist immer identisch mit dem Koeffizienten a_0.
Sie lässt sich stets aus der Funktionsgleichung ablesen.

Schnittpunkt mit der x – Achse $P_x(x_s\,|\,0)$ Nullstelle: Bedingung: $f(x) = 0$

Satz:

Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen.
Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle.

Verfahren zur Berechnung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen.

Faktorisierungsverfahren:

Beispiel:

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ der Faktor x kann ausgeklammert werden

$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und der Klammerausdruck ist Null

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit $x_2 = -1 \;\; x_3 = 2$

$\Rightarrow L = \{\,0\,;-1;\,2\,\}$ als Lösungsmenge geschrieben

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(0\,|\,0);P_{x_2}(-1\,|\,0);P_{x_3}(2\,|\,0)}}$ Koordinaten der Schnittpunkte mit der x - Achse

$f(x) = \underbrace{(x+1)(x-2)x}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$

Substitutionsverfahren:

Beispiel:

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ biquadratische Gleichung

Substitution: $x^2 = z$

$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \Rightarrow z_1 = 9$ und $z_2 = 4$

Substitution rückgängig machen:

$x^2 = z_1 = 9$ und $x^2 = z_2 = 4 \;\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -2 \quad \Rightarrow L = \{3\,,-3\,;2\,;-2\}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(3\,|\,0);P_{x_2}(-3\,|\,0);P_{x_3}(2\,|\,0);P_{x_4}(-2\,|\,0)}}$

$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Polynomdivision:

Ist eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion (Polynom) bekannt, dann kann der Grad des Polynoms durch Polynomdivision um eins verringert werden.

Beispiel:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$f(2) = 8 + 12 - 8 - 12 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 2}$ ist Nullstelle (durch probieren gefunden)

Polynomdivision.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 + 3x^2 - 4x - 12\right) : (x - 2) = x^2 + 5x + 6 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad 5x^2 - 4x \\
\quad \underline{-\left(5x^2 - 10x\right)} \\
\qquad 6x - 12 \\
\qquad \underline{-(6x - 12)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Jetzt muss nur noch die quadratische Gleichung

$x^2 + 5x + 6 = 0$ gelöst werden.

$p = 5 \quad q = 6 \Rightarrow D = 2{,}5^2 - 6 = 6{,}25 - 6 = 0{,}25$

$x_{2/3} = -2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = -2{,}5 \pm 0{,}5$

$x_2 = -2 \quad x_3 = -3$

$\Rightarrow L = \{2\,;-2\,;-3\} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(2\,|\,0)\,;P_{x_2}(-2\,|\,0)\,;P_{x_3}(-3\,|\,0)}} \quad f((x)) = \underbrace{(x-2)(x+2)(x+3)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}}$

HORNER

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 3 & -4 & 12 & \\
x_1 = 2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{+10} & \underline{+12} & \Rightarrow 1x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 & 1 & 5 & 6 & 0 &
\end{array}
$$

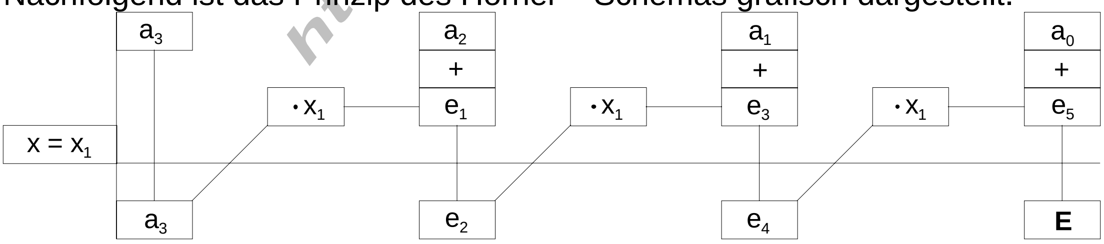
Graphen ganzrationaler Funktionen zeichnen

Um den Graphen einer ganzrationalen Funktion zeichnen zu können, benötigt man eine Wertetabelle und die Achsenschnittpunkte.

Wertetabelle:

Eine Möglichkeit die Wertetabelle zu erhalten besteht darin, alle benötigten Funktionswerte mit dem Taschenrechner auszurechnen.
Ein anderes, oftmals einfacheres Verfahren liefert das HORNER – Schema.

Nachfolgend ist das Prinzip des Horner – Schemas grafisch dargestellt.



<u>Horner - Schema</u> zur Bestimmung der Funktionswerte der Funktion

$f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3$ für

$D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \\
x=-4 & & \underline{-4} & \underline{+20} & \underline{-36} & \\
 & 1 & -5 & 9 & -33 & \Rightarrow f(-4) = -33 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \\
x=-3 & & \underline{-3} & \underline{+12} & \underline{-3} & \\
 & 1 & -4 & 1 & 0 & \Rightarrow f(-3) = 0 \text{ Nullstelle} \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \\
x=-2 & & \underline{-2} & \underline{+6} & \underline{+10} & \\
 & 1 & -3 & -5 & 13 & \Rightarrow f(-2) = 13 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \\
x=-1 & & \underline{-1} & \underline{+2} & \underline{+9} & \text{Hochpunkt} \\
 & 1 & -2 & -9 & 12 & \Rightarrow f(-1) = 12 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \text{Nulldurchgang} \\
x=1 & & \underline{+1} & \underline{0} & \underline{-11} & \\
 & 1 & 0 & -11 & -8 & \Rightarrow f(1) = -8 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \\
x=2 & & \underline{+2} & \underline{+2} & \underline{-18} & \\
 & 1 & 1 & -9 & -15 & \Rightarrow f(2) = -15 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \text{Tiefpunkt} \\
x=3 & & \underline{+3} & \underline{+6} & \underline{-15} & \\
 & 1 & 2 & -5 & -12 & f(3) = -12 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 3 & \text{Nulldurchgang} \\
x=4 & & \underline{+4} & \underline{+12} & \underline{+4} & \\
 & 1 & 3 & 1 & 7 & f(x) = 7
\end{array}$$

Schnittpunkt mit der y - Achse:
$f(0) = 3$

Funktionsverlauf von II - I

Aus dem Schema erkennen wir:

Nullstelle bei $x = -3$; $f(-3) = 0$

Hochpunkt zwischen $[-2\,;-1]$

Nulldurchgang zwischen $[0\,;1]$

Tiefpunkt zwischen $[2\,;3]$

Nulldurchgang zwischen $[3\,;4]$

Wertetabelle:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−33	0	13	12	3	−8	−15	−12	7

Berechnung der Nullstellen:

$f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ mit $\underline{x_1 = -3}$ als bekannte Nullstelle

$\Rightarrow$ Polynomdivision:

$$\left(x^3 - x^2 - 11x + 3\right) : \left(x+3\right) = x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad p = -4 \quad q = 1$$

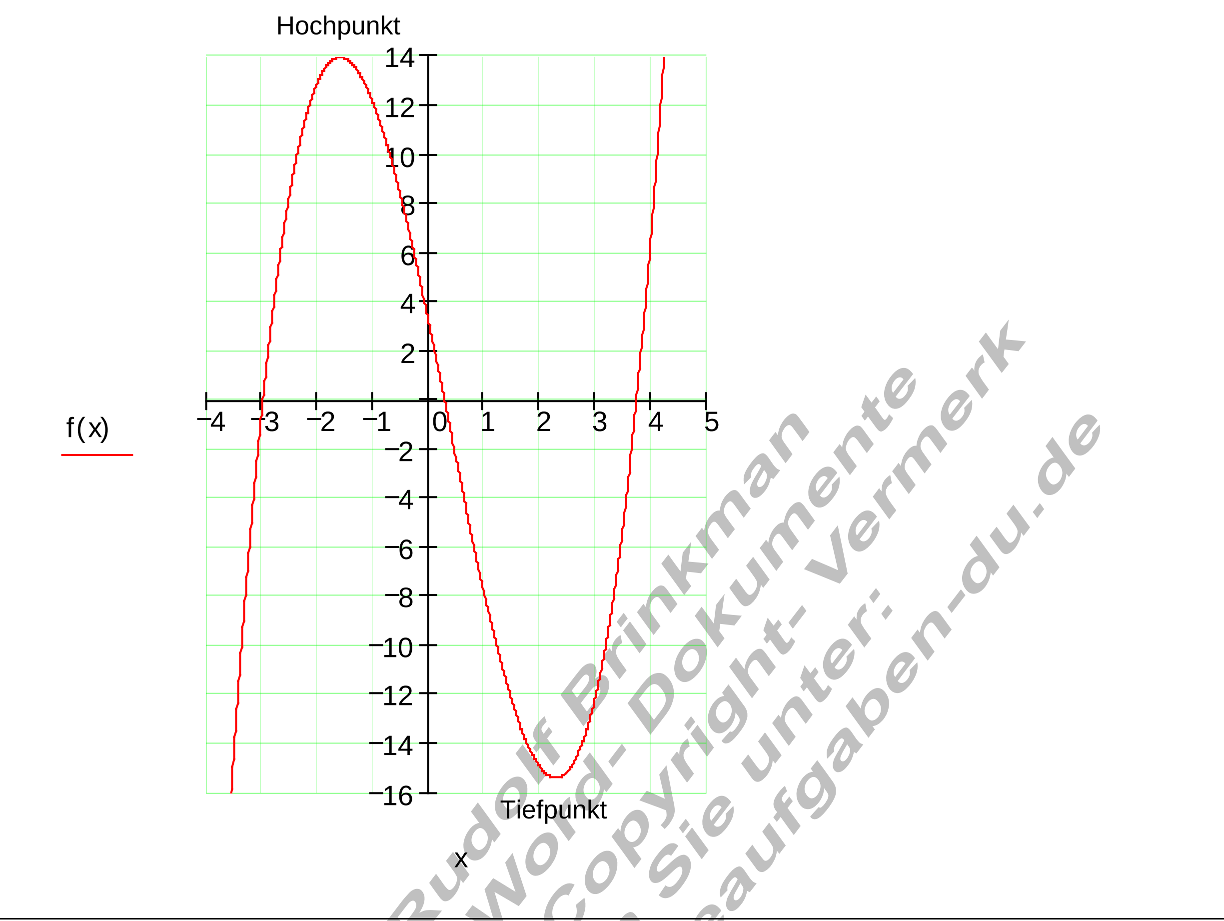
$$x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73 \qquad x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$$

<u>Wertetabelle:</u>

x	−4	−3	−2	−1	0	0,27	1	2	3	3,73	4
f(x)	−33	0	13	12	3	0	−8	−15	−12	0	7

Mit allen nun bekannten Daten kann der Funktionsgraph gezeichnet werden.



Was wir allerdings noch nicht genau bestimmen können, sind der Hochpunkt und der Tiefpunkt des Graphen.
Dazu benötigen wir die Differentialrechnung in einem späteren Kapitel.

Aufstellen der Funktionsgleichung aus gegebenen Bedingungen

Beispiel für eine Ganzrationale Funktion 3. Grades.

Die Koordinaten von 4 Punkten, die auf dem Funktionsgraphen liegen sollen, sind wie folgt vorgegeben:

$$P_1(-1\,|\,2)\,;P_2(2\,|\,-1)\,;P_3(-3\,|\,44)\,;P_4(1\,|\,0)$$

Zunächst wird das Gleichungssystem für die gegebenen Punkte aufgestellt.

$$\begin{array}{l|lclllllcl}
P_1(-1\,|\,2): & f(-1) & = & -1a_3 & +1a_2 & -1a_1 & +1a_0 & = & 2 \\
P_2(2\,|\,-1): & f((2)) & = & 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & +1a_0 & = & -1 \\
P_3(-3\,|\,44): & f(-3) & = & -27a_3 & +9a_2 & -3a_1 & +1a_0 & = & 44 \\
P_4(1\,|\,0): & f(1) & = & 1a_3 & +1a_2 & +1a_1 & +1a_0 & = & 0
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	2	
1	2	4	8	−1	II − I
1	−3	9	−27	44	III − I
1	1	1	1	0	IV − I

Die Lösung des Gleichungssystems mit dem Gauß - Algorithmus führt auf die Koeffizienten:

$a_3 = -1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$

und damit auf die Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$