Polynomdivision

Zwischen der Polynomdivision und dem schriftlichen dividieren besteht ein Zusammenhang. Folgende Gegenüberstellung soll das im Falle einer Division ohne Rest zeigen.

$$
\begin{array}{lcl}
62228 : 47 = 1\;3\;2\;4 & & \\
\underline{-47} & \leftarrow & 47\cdot 1 \\
\;\;152 & & \\
\underline{-141} & \leftarrow & 47\cdot 3 \\
\;\;\;112 & & \\
\;\;\underline{-94} & \leftarrow & 47\cdot 2 \\
\;\;\;\;188 & & \\
\;\;\underline{-188} & \leftarrow & 47\cdot 4 \\
\;\;\;\;\;\;0 & &
\end{array}
$$

Die Zahl 62, bestehend aus den ersten zwei Ziffern der zu teilenden Zahl wird durch den Teiler (47) dividiert.
Das Ergebnis (1) wird mit dem Teiler 47 multipliziert und von der Zahl (62) subtrahiert.
Mit dem Ergebnis der Subtraktion (152) verfährt man in gleicher Weise.
Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.
Probe: $47\cdot 1324 = 62228$

$$
\begin{array}{lcl}
\left(x^3-6x^2+11x-12\right) : (x-4) = x^2-2x+3 & & \\
\underline{-\left(x^3-4x^2\right)} & \longleftarrow & (x-4)\cdot x^2 \\
\qquad -2x^2+11x & & \\
\qquad \underline{-\left(-2x^2+8x\right)} & \longleftarrow & (x-4)\cdot(-2x) \\
\qquad\qquad 3x-12 & & \\
\qquad\qquad \underline{-(3x-12)} & \longleftarrow & (x-4)\cdot 3 \\
\qquad\qquad\qquad 0 & &
\end{array}
$$

Der erste Summand des zu teilenden Polynoms (x^3) wird durch den ersten Summanden des Teilers (x) dividiert.
Das Ergebnis (x^2) wird mit dem Teiler ($x-4$) multipliziert und von dem zu teilenden Polynom subtrahiert.
Mit dem Ergebnis der Subtraktion ($-2x^2 + 11x - 12$) Verfährt man in gleicher Weise.
Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.

Probe: $(x-4)\cdot\left(x^2-2x+3\right) = x^3-6x^2+11x-12$

Beispiele:

$$
\begin{array}{l}
\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):\left(-2x+3\right) = 3x^2+2x-4 \\
\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)} \\
\qquad -4x^2+14x \\
\qquad \underline{-(-4x^2+6x)} \\
\qquad\qquad 8x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(8x-12)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right) = \left(3x^2+2x-4\right)\left(-2x+3\right)$$

$$
\begin{array}{l}
\left(a^3-b^3\right):(a-b) = a^2+ab+b^2 \\
\underline{-\left(a^3-a^2b\right)} \\
\qquad a^2b-b^3 \\
\qquad \underline{-(a^2b-ab^2)} \\
\qquad\qquad ab^2-b^3 \\
\qquad\qquad \underline{-(ab^2-b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Probe:

$$\left(a^3-b^3\right) = \left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)$$

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):\left(x-2\right)=x^2+5x+4$$
$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$
$$5x^2-6x$$
$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$
$$4x-8$$
$$\underline{-\left(4x-8\right)}$$
$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)\left(x-2\right)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):\left(a+b\right)=a^2+2ab+b^2$$
$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$
$$2a^2b+3ab^2$$
$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$
$$ab^2+b^3$$
$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$
$$0$$

Probe: $\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}\left(a+b\right)=\underbrace{\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)}_{\text{Linearfaktoren}}$

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):\left(x-2\right)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$
$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$
$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$
$$-x+2$$
$$\underline{-(-x+2)}$$
$$0$$

Probe: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)\left(x-2\right)$

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 \qquad -14x-12\right):\left(x-3\right)=2x^2+6x+4 \\
\underline{-\left(2x^3-6x^2\right)} \\
\qquad 6x^2-14x \\
\quad \underline{-\left(6x^2-18x\right)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\quad \underline{-\left(4x-12\right)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Wie das nebenstehende Beispiel zeigt, ist es in manchen Fällen sinnvoll, bei der Schreibweise der Terme eine Lücke zu lassen.

Eine andere Möglichkeit ist, die Lücke mit Null zu füllen.

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

Das folgende Beispiel behandelt die Division mit Rest. Ebenfalls bekannt bei der schriftlichen Division von Zahlen.

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):\left(x-1\right)=x^2+4x-2 \quad \text{(Rest } -10\text{)}$$

$$\Rightarrow \left(x^3+3x^2-6x-8\right):\left(x-1\right)=x^2+4x-2-\frac{10}{\left(x-1\right)}$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3-x^2\right)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\quad \underline{-\left(4x^2-4x\right)} \\
\qquad\qquad -2x-8 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-2x+2\right)} \\
\qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{\left(x-1\right)}\right)\left(x-1\right)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

Da gerade Anfänger bei der Durchführung der Polynomdivision immer wieder Fehler machen, ist es wichtig das erhaltene Ergebnis durch eine Proberechnung zu kontrollieren.

Ein Anwendungsbeispiel der Polynomdivision.
Ist von einem Polynom eine Nullstelle bekannt, so kann der Grad des Polynoms um eins reduziert werden.

$x_1=2$ ist eine bekannte Nullstelle, es erfolgt die Polynomdivision

$$\left(x^3-x^2-5x+6\right):\left(x-2\right)=\underbrace{x^2+x-3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3-2x^2\right)} \\
\qquad x^2-5x \\
\quad \underline{-\left(x^2-2x\right)} \\
\qquad\qquad -3x+6 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-3x+6\right)}
\end{array}
$$

Die Nullstellen des Restpolynoms lassen sich durch die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+x-3=0$ berechnen