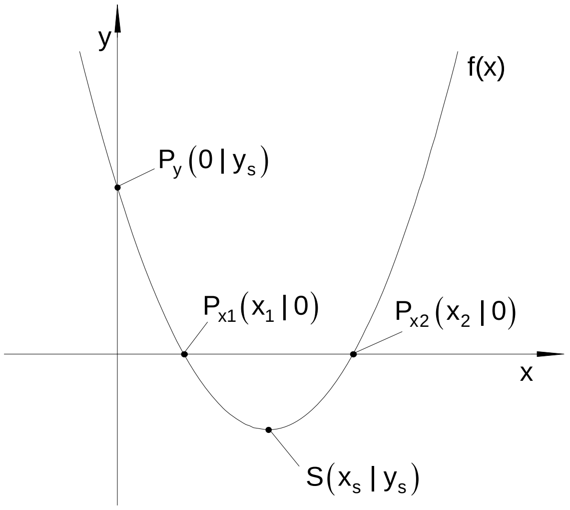
Achsenschnittpunkte quadratischer Funktionen



Bei der Betrachtung des Graphen in nebenstehender Abbildung fallen einige Punkte besonders auf.

Der Schnittpunkt mit der y – Achse:

$P_y(0 | y_2)$

Die Schnittpunkte mit der x – Achse:

$P_{x1}(x_1 | 0)$ und $P_{x2}(x_2 | 0)$

Der Scheitelpunkt:

$S(x_s | y_s)$:

Als Untersuchungsbeispiel diene die Funktion: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Schnittpunkt mit der y – Achse

Der Graph schneidet die y – Achse im Punkt P_y.
Für jeden Punkt, der auf der y – Achse liegt, ist die x – Koordinate Null.

Bedingung für P_y: f(0)

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 | 5)}}$$

In diesem Fall hätten wir die y – Koordinate auch direkt aus der Funktionsgleichung ablesen können. Das ist aber nicht immer möglich, wie folgendes Beispiel zeigt.

$f(x) = (x - 3)^2 - 4$ (Scheitelpunktform) $S(3 | -4)$

$$P_y(0 | y_y) :\Rightarrow y_s = f(0) = (0 - 3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 | 5)}}$$

Schnittpunkte mit der x – Achse.

Der Graph schneidet die x – Achse in den Punkten P_{x1} und P_{x2} .
Für jeden Punkt, der auf der x – Achse liegt, ist die y – Koordinate Null.

Bedingung für P_x: $f(x) = 0$
Der Ansatz $f(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$
Lösung durch quadratische Ergänzung:

$$x^2 - 6x + \color{red}{3^2 - 3^2} + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow |x-3| = \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{4} + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(5 \mid 0) \,;\, P_{x2}(1 \mid 0)}}$$

Training P03: Nullstellenbestimmung über die quadratische Ergänzung

Gegeben ist die Funktionsgleichung f(x) einer Parabel
(ganzrationale Funktion 2. Grades).
Bestimmen Sie für folgende Parabeln die Nullstellen und die Achsenschnittpunkte.
Zeichnen Sie den Graphen unter zu Hilfenahme des Scheitelpunktes.

1.)	009	$f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad S(-2 \mid -9)$	2.)	026	$f(x) = -x^2 - x + 6 \quad S\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{11}{4}\right)$
3.)	073	$f(x) = -x^2 - 4x - 4 \quad S(-2 \mid 0)$	4.)	090	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 \quad S\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{49}{8}\right)$
5.)	078	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad S(4 \mid -3)$	6.)	082	$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad S(2 \mid 1)$
7.)	113	$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1 \quad S(-2 \mid -2)$	8.)	148	$f(x) = 4x^2 + x - 5 \quad S\left(-\frac{1}{8} \mid -\frac{81}{16}\right)$
9.)	159	$f(x) = -4x^2 - x + 5 \quad S\left(-\frac{1}{8} \mid \frac{81}{16}\right)$	10.)	127	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \quad S\left(1 \mid -\frac{7}{3}\right)$

Ausführliches Beispiel zur Nullstellenbestimmung durch quadratische Ergänzung:

Funktionsgleichung der Parabel in allgemeiner Form:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

Bedingung für Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$

Die quadratische Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$

soll nun mit der Methode der quadratischen Ergänzung gelöst werden.

$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \mid : \left(-\frac{1}{2}\right)$ auf die Normalform bringen

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 12 = 0$ quadratische Ergänzung

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{1. binomische Formel}} \underbrace{-4 - 12}_{-16} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0 \mid +16$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \mid \sqrt{\ }$ Wurzel ziehen (radizieren)

$\Leftrightarrow |x+2| = \sqrt{16} = 4$

Betrag auflösen!

Fall 1: $x + 2 = 4 \mid -2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x_1 = 2$

Fall 2: $x + 2 = -4 \mid -2 \Leftrightarrow x = -6 \Rightarrow x_2 = -6$

Die Nullstellen: $\boxed{x_1 = 2}$ bzw. $\boxed{x_2 = -6}$

Schnittpunkte mit der x – Achse: $\boxed{P_{x1}(2 \mid 0)}$ bzw. $\boxed{P_{x2}(-6 \mid 0)}$

Bedingung für den Schnittpunkte mit der y – Achse:

$y_s = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 6)}$

Bemerkungen zum Betrag

Jemand gewinnt 120 €, wir sagen auch er gewinnt einen Geldbetrag von 120 €.
Jemand bekommt einen Strafzettel über 120 €, wir sagen auch er hat einen Geldbetrag von 120 € zu zahlen.
In beiden Fällen handelt es sich um 120 €.
Finanztechnisch bedeutet der Gewinn ein Plus und die Strafe ein Minus.

Der Betrag einer Zahl ist mathematisch immer positiv.

Soll der Betrag einer Variablen bestimmt werden, so brauchen wir eine Rechenvorschrift.

Rechenvorschrift: $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

Beispiel:
Die Betragsgleichung $|x+2| = \sqrt{3}$ soll gelöst werden.

Rechenvorschrift: $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{falls } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{falls } x+2 < 0 \end{cases}$

Das führt zu einer Fallunterscheidung:

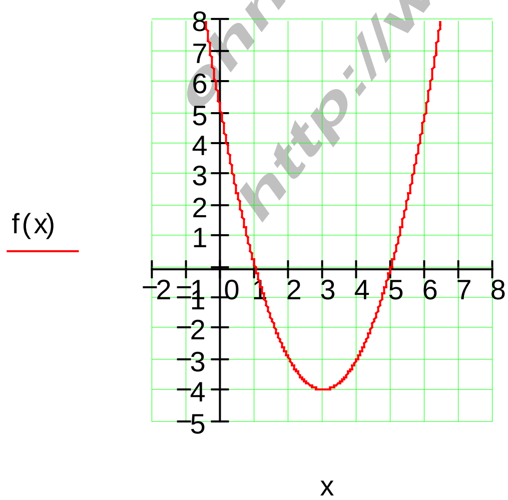
1. Fall $x+2 \geq 0 \Rightarrow \quad x+2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2+\sqrt{3}}}$

2. Fall $x+2 < 0 \Rightarrow -(x+2) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2-\sqrt{3}}}$

Lösungsansatz in Kurzform: $|x+2| = \sqrt{3} \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{3}$

Zu weiteren Betrachtungen zeichnen wir den Graphen unserer Beispielfunktion.

$f(x) := x^2 - 6x + 5$



Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel, deren Scheitel in den Punkt S (3 | - 4) verschoben wurde.

Der Schnittpunkt mit der y – Achse ist

P_y (0 | 5)

Die Schnittpunkte mit der x – Achse sind

P_{x1} (1 | 0) und P_{x2} (5 | 0)

Die Schnittpunkte mit der x – Achse nennen wir Nullstellen der Funktion f(x), da dort gilt: f (1) = 0 und f (5) = 0.

Definitions – und Wertemenge

Oft will man den Verlauf eines Graphen nur in einem bestimmten Bereich betrachten. Das führt zu den Begriffen Definitionsmenge und Wertemenge.

Unsere Beispielfunktion soll nur im Bereich der x – Werte von x = -1 bis x = +6 auf die dort auftretenden Funktionswerte untersucht werden.

Definitionsmenge : $D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$ bedeutet von $x = -1$ bis $x = 6$

Die Wertemenge:
Der kleinste Funktionswert (Minimum) ist der Scheitelwert, da die Parabel nach oben geöffnet ist, also $x_{min} = -4$.
Nun werden die Intervallgrenzen $x = -1$ und $x = 6$ untersucht.

$f(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$

$f(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 36 - 36 + 5 = 5$

Damit ist die Wertemenge im Definitionsbereich:

$\underline{\underline{W = \{y \mid -4 \le y \le 12\}_{\mathbb{R}}}}$

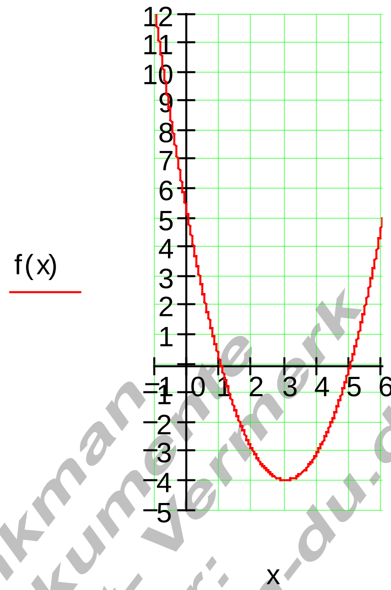
Merke:
Die Angabe einer Wertemenge bezieht sich immer auf eine Definitionsmenge.

Die nebenstehende Abbildung zeigt genau den Ausschnitt des Funktionsgraphen, der durch die Definitionsmenge vorgegeben wurde.

$f(x) := x^2 - 6x + 5$

$D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

$W = \{y \mid -4 \le y \le 12\}_{\mathbb{R}}$

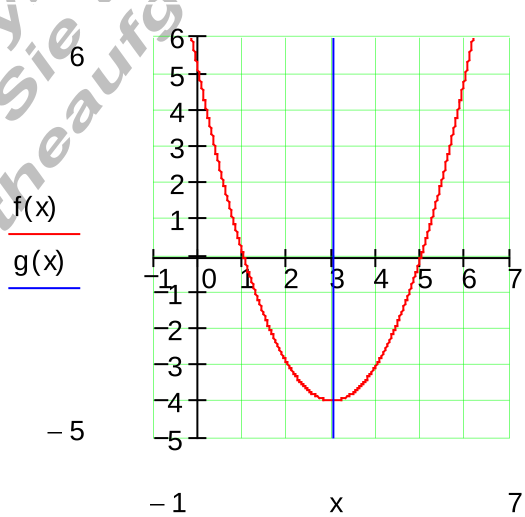


Symmetriebetrachtungen

Die abgebildete Parabel ist symmetrisch zu der Achse, die parallel zur y – Achse durch den Scheitelpunkt verläuft.
Das gilt für alle Parabeln.

Die Gleichung der Symmetrieachse durch den Scheitel $S(x_s \mid y_s)$ lautet

$x = x_s$ hier $x = 3$



Auch die Nullstellen sind symmetrisch zur Symmetrieachse.
Das bedeutet, bei bekannten Nullstellen kann der x – Wert des Scheitels berechnet werden.

Scheitelpunktberechnung über die Nullstellen:

$$\text{Nullstellen}: x_1; x_2 \text{ bekannt } \Rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow S(x_s \mid f(x_s))$$

$$\text{Für unser Beispiel gilt: } x_1 = 1;\ x_2 = 5 \Rightarrow x_s = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow S(3 \mid f(3))$$

Sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt, so ist das arithmetische Mittel dieser die x – Koordinate des Scheitelpunktes.

Herleitung der p – q – Formel

Eine Möglichkeit der Nullstellenbestimmung einer Quadratischen Funktion geht über die Lösung einer quadratischen Gleichung mittels quadratischer Ergänzung. Man kann dafür auch eine Lösungsformel entwickeln.

Die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$

führt zur Normalform der quadratischen Gleichung:

$x^2 + px + q = 0$ Lösung durch quadratische Ergänzung:

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Leftrightarrow \quad \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel wird auch Diskriminante genannt.

$$\text{Diskriminante} = D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\text{Die p} - \text{q} - \text{Formel:} \quad \underline{\underline{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}}}$$

Beispiel:
Die Nullstellen unserer Beispielfunktion sollen nun über die p – q – Formel berechnet werden.

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6 \,;\, q = 5$

Zuerst wird die Diskriminante ausgerechnet:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 3 + 2 = \underline{\underline{5}} \vee x_2 = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

Diskriminante und Lösungsmenge.

Quadratische Gleichungen sind nicht immer lösbar.

Beispiel:

$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow p = -6 \,;\, q = 10$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 10 = -1$$

$$\text{p} - \text{q} - \text{Formel:} \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{-1} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Hat die Diskriminante einen negativen Wert, so ist die quadratische Gleichung nicht lösbar, denn Wurzeln sind nur für positive Zahlen definiert.

Quadratische Gleichungen können auch nur eine Lösung besitzen.

Beispiel:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow p = -6\,;\, q = 9$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 9 = 0$

$p-q-\text{Formel}: \ x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$ nur eine Lösung

Zusammenfassung:
Die Diskriminante D bestimmt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung.

$x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D} \quad \vee \quad x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}$

$D > 0 \Rightarrow L = \{x_1\,;\,x_2\}$ Zwei Lösungselemente

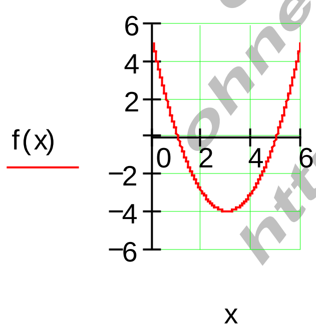
$D = 0 \Rightarrow L = \{x\}$ Ein Lösungselement (Doppellösung)

$D < 0 \Rightarrow L = \{\ \}$ Kein Lösungselement

Lösungsmenge und Funktionsgraph.

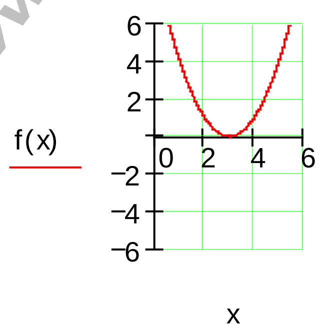
Welche Bedeutung hat die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung auf den Verlauf des Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion?
In den Beispielen hatten wir drei quadratische Gleichungen, mit jeweils zwei, keiner oder nur einer Lösung.
Wir zeichnen die dazugehörigen Funktionsgraphen .

$f(x) := x^2 - 6x + 5$



Zwei Nullstellen

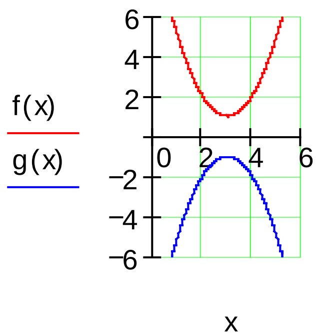
$f(x) := x^2 - 6x + 9$



Eine Nullstelle

$f(x) := x^2 - 6x + 10$

$g(x) := -x^2 + 6x - 10$



Keine Nullstelle

Bei zwei Nullstellen schneidet der Funktionsgraph die x – Achse zweimal.
Bei einer Nullstelle berührt der Funktionsgraph die x – Achse mit dem Scheitel.
Liegt keine Nullstelle vor, so liegt der Scheitel einer nach oben geöffneten Parabel oberhalb der x – Achse, der Scheitel einer nach unten geöffneten Parabel unterhalb der x – Achse.

Der Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$,
dann gilt der Wurzelsatz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Der Beweis folgt durch direkte Rechnung:

Addiere x_1 und x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 + x_2 = -p}}$$

Multipliziere x_1 und x_2

$$x_1 \cdot x_2 = \underbrace{\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)}_{\text{3. Binomische Formel}}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - D$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = q$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 \cdot x_2 = q}}$$

Dieser Satz ist ganz nützlich für die Ergebniskontrolle der Lösung einer quadratischen Gleichung.

Beispiel:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6 ; q = 5$ Lösung: $x_1 = 5 ; x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = 5 + 1 = 6 = -p \,(w)$

$x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot 1 = 5 = q \,(w)$

Nullstellen und Linearfaktoren

Nach Vieta gilt: $x_1 + x_2 = -p \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = q$

Eingesetzt in die Normalform mit $p = -x_1 - x_2$:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x - x_1\right) - x_2\left(x - x_1\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x - x_1\right)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{\left(x - x_2\right)}_{\text{Linearfaktor}} = 0$$

Eine quadratische Gleichung von der die Nullstellen bekannt sind, kann auch als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden.

Satz vom Nullprodukt:
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Für die quadratische Gleichung unserer Beispielfunktion bedeutet das:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6 \,;\, q = 5$ Lösung: $x_1 = 5 \,;\, x_2 = 1$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$

Nun können wir selber quadratische Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen konstruieren:

Beispiel:
Es soll eine quadratische Funktion mit den Nullstellen x_1 = -2 und x_2 = 3 entwickelt werden, die nach unten geöffnet ist und den Formfaktor ¾ besitzt.

$x_1 = -2 \,;\, x_2 = 3$

$f(x) = -\frac{3}{4}(x+2)(x-3)$

$= -\frac{3}{4}\left(x^2 - x - 6\right) = \underline{\underline{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}}}$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$

$y_s = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{75}{16}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{75}{16}\right)}}$

$f(x) := \frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$