Einführung der quadratischen Funktionen

Jeder, der sich auf die Führerscheinprüfung vorbereitet sollte wissen, dass sich der Anhalteweg eines bremsenden Autos auf trockener asphaltierter Straße aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammensetzt.
Nach folgenden Faustregeln lassen sich aus der Geschwindigkeit v in km/h der Reaktionsweg r und der Bremsweg b in Meter berechnen.

Achtung:
Mitteilung der Rheinischen Post vom 3.3.04
Ab 1. Juli 2004 wird der Anhalteweg auf einer trockenen asphaltierten Straße mit einem anderen Bremsweg berechnet.

Bremsweg: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ Reaktionsweg: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

Bemerkung: ab Juni 2004 gilt für den Bremsweg: $b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

Bemerkung zu den Einheiten der Faustformel:
Der Brems – bzw. Reaktionsweg kommt in Meter (m) heraus, wenn die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde (km/h) eingesetzt wird.

a) Bestimmen Sie für beide Fälle die Funktionsgleichung s = f(v), mit der für jede gefahrene Geschwindigkeit der Anhalteweg berechnet werden kann.
b) Stellen Sie für beide Fälle in einer Wertetabelle für folgende gefahrene Geschwindigkeiten v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h die jeweiligen Anhaltewege s zusammen.
c) Zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.
d) Kommentieren Sie das Gesamtergebnis.

Problemlösung:

a) Die Funktionsgleichung

alte Regelung: $f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$

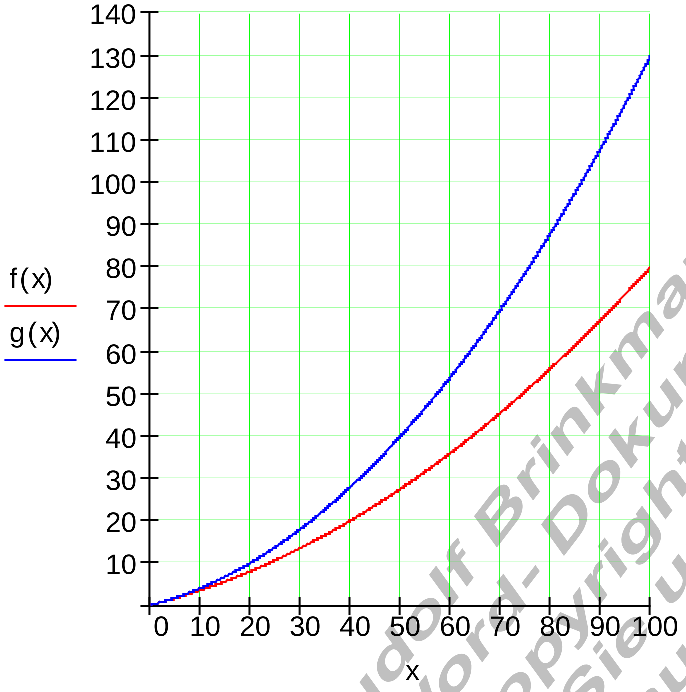
neue Regelung: $f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$

b) Die Wertetabelle

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

c) Die Graphen

$$f(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{10} \qquad g(x) := \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{10}$$



Die x – Achse stellt die jeweils gefahrene Geschwindigkeit in km/h da.
Die y – Achse stellt den jeweiligen Anhalteweg in m da.

d) Der Kommentar

Nach der neuen Verordnung wird der Unterschied mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer.
Bei 50 km/h beträgt der neue Anhalteweg 27,5 m, das sind etwa 69% des alten Weges von 40 m.
Bei 100 km/h beträgt der neue Anhalteweg nur noch 80 m, das sind etwa 61% des alten Weges von 130 m.
Die Verringerung des Bremsweges ist wegen der besseren Bremsen (ABS) sinnvoll.

Bei genauer Betrachtung der Funktionsgleichungen und der Graphen stellen wir fest, das es sich weder um lineare Funktionen, noch um Geraden handelt.

Die Funktionsgleichungen haben die Form:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Solche Funktionen nennt man quadratische Funktion
oder auch ganzrationale Funktionen 2. Grades.
Die Graphen werden Parabeln genannt.

Training P01:
Zeichnen Sie die Graphen folgender Parabeln. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an.

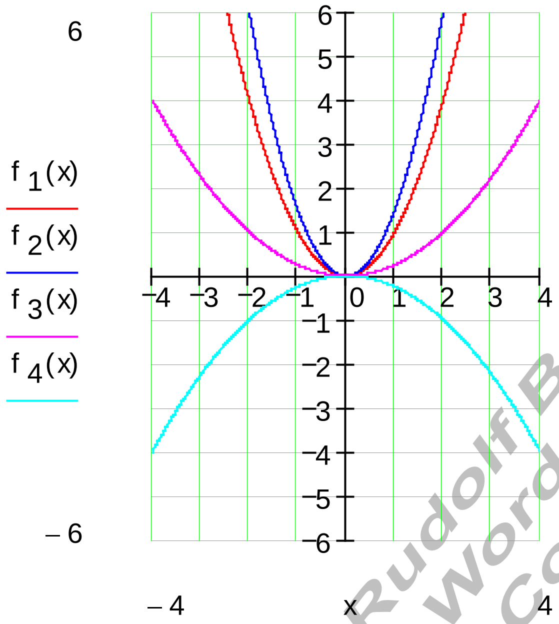
1.)	009	$f(x) = x^2 + 4x - 5$	2.)	004	$f(x) = x^2 + 2x + 5$
3.)	019	$f(x) = -x^2 + x + 6$	4.)	042	$f(x) = x^2 - x$
5.)	053	$f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$	6.)	076	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$
7.)	080	$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$	8.)	085	$f(x) = -2x^2 + 8x - 11$
9.)	095	$f(x) = 3x^2 - 3x$	10.)	116	$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

Normalparabel, Formfaktor und Verschiebungen.

Arbeitsauftrag:

Untersuchen Sie für verschiedene Werte von a_2 die Funktion $f(x) = a_2x^2$ und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$



Die Funktionsgleichungen der abgebildeten Parabeln unterscheiden sich nur durch den Koeffizienten a_2 von x^2.

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$

$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

Dieser Koeffizient a_2 ist für die Form der Parabel verantwortlich und heißt demnach Formfaktor.

Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten S (0 | 0)

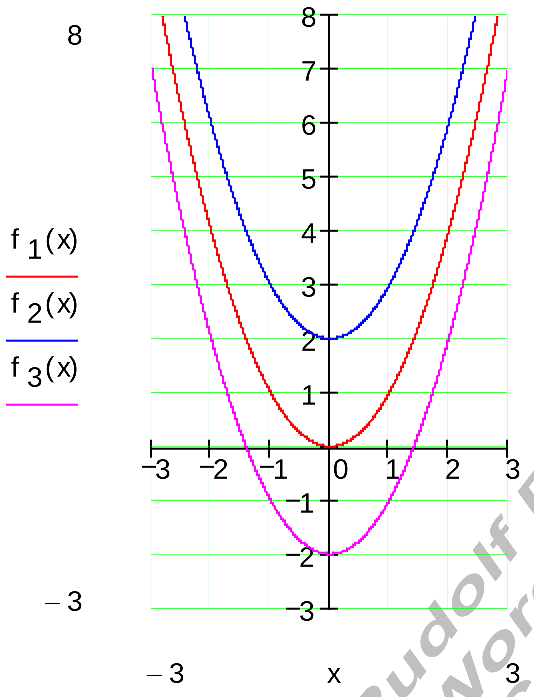
Wie beeinflusst der Formfaktor die Gestalt der Parabel?

Formfaktor		Parabelbezeichnung
$a = 1$	$\rightarrow$	Normalparabel
$a > 1$	$\rightarrow$	gestreckte Parabel
$0 < a < 1$	$\rightarrow$	gestauchte Parabel
$a = -1$	$\rightarrow$	an der x - Achse gespiegelte Normalparabel
$a < -1$	$\rightarrow$	gestreckte Parabel, an der x - Achse gespiegelt
$-1 < a < 0$	$\rightarrow$	gestauchte Parabel, an der x - Achse gespiegelt

Arbeitsauftrag:

Untersuchen Sie für verschiedene Werte von a_0 die Funktion $f(x) = x^2 + a_0$ und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = x^2 + 2 \quad f_3(x) = x^2 - 2$



Es handelt sich dabei um eine verschobene Normalparabel, deren Scheitelpunkt S um a_0 Einheiten verschoben wurde.

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = x^2 + 2$

$f_3(x) = x^2 - 2$

Die Verschiebung erfolgt längs der Ordinatenachse, wobei die Richtung der Verschiebung durch das Vorzeichen von a_0 bestimmt wird.

Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten S (0 | a_0).

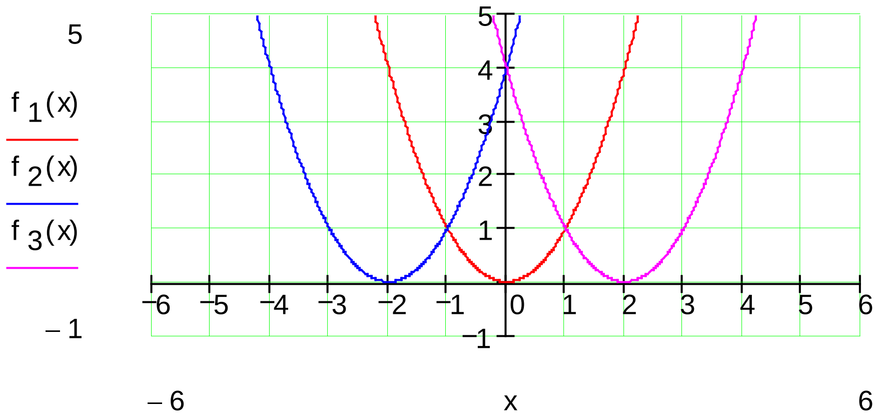
Arbeitsauftrag:

Untersuchen Sie für verschiedene Werte von u die Funktion $f(x) = (x + u)^2$ und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x + 2)^2 \quad f_3(x) = (x - 2)^2$

Wertetabellen:

f_1	x	–2	–1	0	1	2	f_2	x	–4	–3	–2	–1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



Es handelt sich um eine verschobene Normalparabel, deren Scheitelpunkt S um u Einheiten auf der x – Achse verschoben wurde.
Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten S (-u | 0)

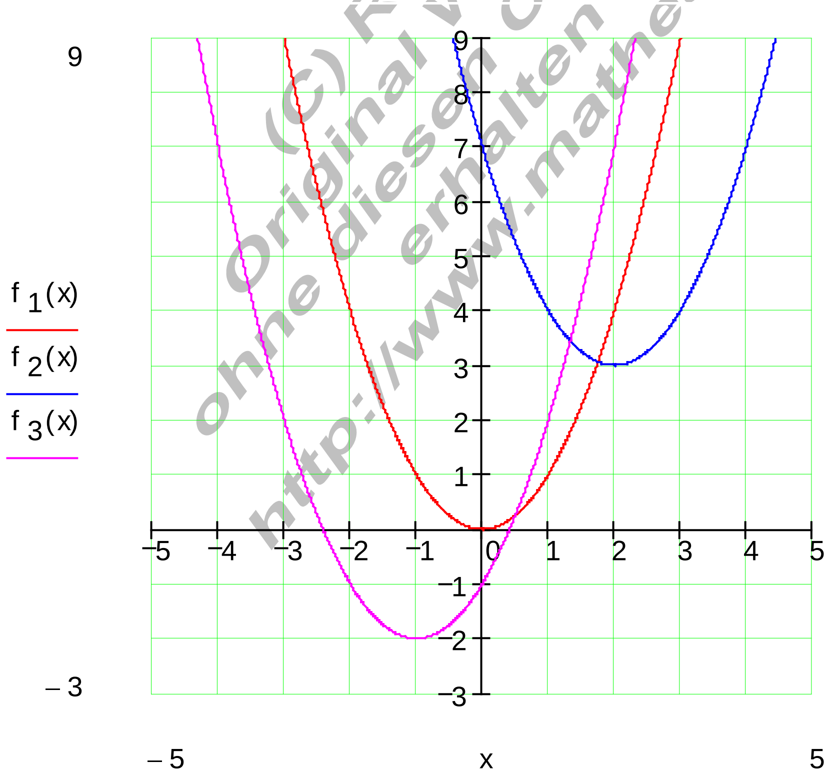
$u > 0 \quad \Rightarrow$ Verschiebung nach links; der Scheitelpunkt S liegt links vom Ursprung

$u < 0 \quad \Rightarrow$ Verschiebung nach rechts; der Scheitelpunkt S liegt rechts vom Ursprung

Arbeitsauftrag:

Untersuchen Sie für verschiedene Werte von u und a_0 die Funktion
$f(x) = (x+u)^2 + a_0$ und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$



Der Graph von $f_2(x)$ ist wieder eine Normalparabel, deren Scheitelpunkt S um zwei Einheiten nach rechts und um drei Einheiten nach oben verschoben ist.

Der Graph von $f_3(x)$ ist ebenfalls eine Normalparabel, deren Scheitelpunkt S um eine Einheit nach links und um zwei Einheiten nach unten verschoben ist.

Eine Funktion der Art $f(x) = (x+u)^2 + a_0$

nennt man Scheitelpunktform der quadratischen Funktion.

Der Graph der Funktion ist eine Normalparabel, die um den Wert u in Richtung der Abszissenachse und um a_0 in Richtung der Ordinatenachse verschoben ist.

Bezeichnet man den Scheitelpunkt mit $S(x_s \mid y_s)$, so lautet die Scheitelpunktform der quadratischen Funktion: $f(x) = (x-x_s)^2 + y_s$

In Kurzform: $S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x-x_s)^2 + y_s$

Beispiel: $S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

Bisher haben wir nur die Normalparabel verschoben.
Die gleichen Verschiebungen lassen sich auch mit einer beliebigen Parabel durchführen. Dabei ist dann der Formfaktor a_2 zu berücksichtigen.

Allgemein gilt:
Ist $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ die Funktionsgleichung einer Parabel die den Scheitelpunkt $S(x_s \mid y_s)$ besitzt, so ist
$f(x) = a_2(x-x_s)^2 + y_s$ die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung.

Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung.

Wir wissen bereits das gilt:
$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x-x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

Durch eine Termumformung der allgemeinen Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform lässt sich der Scheitelpunkt einer Parabel ermitteln.

Beispiel:
$f(x) = 3x^2 - 12x + 15$ soll in die Scheitelpunktform überführt werden.

1. Schritt: Der Faktor vor x^2 wird ausgeklammert
$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot \left[x^2 - 4x + 5\right]$$

2. Schritt: quadratische Ergänzung in [ ] und Umformung
$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot \left[\underbrace{x^2 - 4x + (2)^2}_{\text{2. Binomische Formel}} - (2)^2 + 5\right] = 3 \cdot \left[(x-2)^2 + 1\right] = 3(x-2)^2 + 3 \Rightarrow \underline{\underline{S(2 \mid 3)}}$$

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4=\frac{1}{2}\left[x^2-6x+8\right]=\frac{1}{2}\left[x^2-6x+3^2-3^2+8\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[(x-3)^2-1\right]=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{\underline{S\left(3\,|\,-\frac{1}{2}\right)}}$$

Beispiel:

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left[x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right]=-\frac{1}{3}\left[x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{36}{16}\right]=-\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{16}\right]=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{4}\,|\,-\frac{9}{16}\right)}}$$

Training P02: Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Gegeben ist die Funktionsgleichung f(x) einer Parabel
(ganzrationale Funktion 2. Grades).
Bestimmen Sie für folgende Parabeln die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt.
Zeichnen Sie den Graphen.

1.)	004	$f(x)=x^2+2x+5$	2.)	006	$f(x)=x^2+4x+1$
3.)	014	$f(x)=x^2-4x+1$	4.)	013	$f(x)=x^2-3x+3{,}5$
5.)	002	$f(x)=x^2+x-3$	6.)	020	$f(x)=-x^2+2x+1$
7.)	022	$f(x)=-x^2+5x-5$	8.)	100	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2$
9.)	124	$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$	10.)	129	$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$