Entwicklung der Zahlenmengen

In der Mathematik werden die Rechenoperationen mit Hilfe von Zahlen definiert. Durch die Entwicklung der Rechenarten von der Addition bis hin zum Logarithmieren wurde die Unzulänglichkeit der Zahlenmenge offenbar, mit der gerade operiert wurde.
So bestand der zuerst bekannte Zahlenbereich aus Zahlen, die zum **Abzählen** benötigt wurden, also die positiven ganzen Zahlen, die als **natürliche Zahlen** bezeichnet werden.
In der Mengenlehre sind die Zahlen als Elemente von Zahlenmengen festgelegt, in den sogenannten **Standardmengen**.

Menge der natürlichen Zahlen.	Symbol: $\mathbb{N}$ $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;...\}$ $\quad 0 \in \mathbb{N}$

Definition	Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält die Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden einschließlich der Zahl Null.

Die Definition ordnet das Element 0 der Menge der natürlichen Zahlen zu. Obwohl dies vom Begriff des Abzählens nicht direkt einzusehen ist, wird dadurch jedoch die Symbolik der Zahlengrundmengen vereinfacht. Aber auch die Schreibweise von Indizes an Koeffizienten beginnt meist mit 0.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \qquad n \in \mathbb{N}$

Innerhalb der natürlichen Zahlen ist die Verknüpfung **Addition** abgeschlossen, d. h. die Addition zweier natürlicher Zahlen führt wieder zu einer natürlichen Zahl.

$$2 + 5 = 7 \qquad a + b = c \qquad a,b,c \in \mathbb{N}$$

Die Subtraktion ist nicht abgeschlossen, da nicht jede dieser Verknüpfungen wieder zu einem Element aus IN führt.

$$5 - 8 = -3 \qquad -3 \notin \mathbb{N}$$

Die Zahlenmenge muss also so erweitert werden, dass die Verknüpfung **Subtraktion** uneingeschränkt möglich ist. Diese Zahlenmenge ist die **Menge der ganzen Zahlen**.

Definition	Die Menge der ganzen Zahlen enthält die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen.

Menge der ganzen Zahlen.	Symbol: $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} = \{.....;-2;-1;0;1;2;3;4;...\}$

In der Menge der ganzen Zahlen sind die Verknüpfungen Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen. Bei der Division zeigt sich jedoch wieder die Unzulänglichkeit dieser Zahlenmenge.

$6:7=\frac{6}{7}\notin\mathbb{Z}$

Die Erweiterung der Menge der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen führt zur **Menge der rationalen Zahlen**, in der die **Division** nahezu uneingeschränkt möglich ist.
Die Division durch Null ist nicht erlaubt.

Definition	Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller Zahlen q, für die gilt: $q=\frac{m}{n}$ und m ist Element der Menge $\mathbb{Z}$ und n ist Element der Menge $\mathbb{Z}$ ohne Null. Symbol: $\mathbb{Q}=\{q \mid q=\frac{m}{n}\wedge m\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{Z}^*\}$

Nach DIN 5473 werden die Standardmengen mit einem Stern gekennzeichnet, wenn das Element 0 nicht enthalten sein soll, also $\mathbb{N}^*,\mathbb{Z}^*,\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*$

Für jede rationale Zahl gibt es unendlich viele Schreibweisen, so dass in der aufzählenden Form der Menge nur die Repräsentanten (nicht mehr kürzbare Brüche) aufgeführt werden.

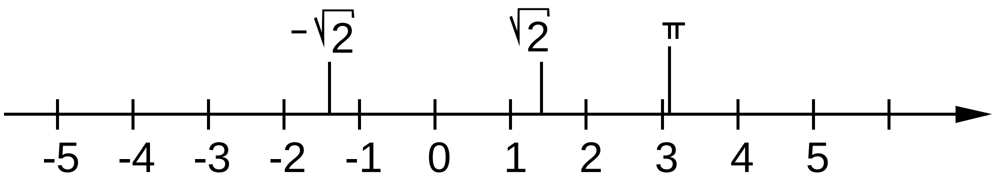
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{6}{3}=....=\frac{64}{128}=...$$

Zusätzlich zu den rationalen Zahlen existieren auf dem Zahlenstrahl Punkte, die keiner rationalen Zahl entsprechen, also nicht durch
$q=\frac{m}{n}$ mit $m\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{Z}^*$
dargestellt werden können.

$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\quad \pi\notin\mathbb{Q}\quad \sin(48^0)\notin\mathbb{Q}\quad \lg 2\notin\mathbb{Q}$

Da diesen Zahlen wie den rationalen Zahlen wirklich ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet ist, nennt man alle Zahlen, denen genau ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet ist, die **Menge der reellen Zahlen**.

Definition	Die Menge der reellen Zahlen ist die Menge aller Punkte des Zahlenstrahls. Symbol: $\mathbb{R}$



In der Menge der reellen Zahlen sind die Verknüpfungen Addition, Subtraktion Multiplikation, Potenzieren, uneingeschränkt und die Division ohne Divisor 0 möglich.

$\sqrt{-45} \notin \mathbb{R}$ $\log_2(-8) \notin \mathbb{R}$

Die Verknüpfungen Radizieren und Logarithmieren sind nicht uneingeschränkt möglich.

Diese Verknüpfungen sind in einer nochmals erweiterten Zahlenmenge abgeschlossen, der **Menge der komplexen Zahlen.**