Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen und Ungleichungen als Aussageform

Zahlengleichungen- oder Ungleichungen mit Zahlen sind **Aussagen**

$3+7=2+8$ Gleichung

$3+7<3+8$ Ungleichung

Bestimmungsgleichungen- oder Ungleichungen sind **Aussageformen**.

$8x+2=18$ Gleichung

$32-x>19$ Ungleichung

Gleichungen und Ungleichungen bestehen aus zwei Termen, rechts und links vom Relationszeichen.

Definition	Die Menge der Elemente **x**, die eine Gleichung bzw. Ungleichung zu einer wahren Aussage führt, heißt **Lösungsmenge (L)** oder Erfüllungsmenge.

Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen bedeutet somit „Bestimmen der Lösungsmengen“.

Definition	Die Menge, der die Elemente zur Erfüllung der Gleichung oder Ungleichung entnommen werden dürfen, heißt **Grundmenge (G)**.

Definition	Die Menge, für die die mathematischen Terme, die in der Gleichung oder Ungleichung vorkommen, definiert sind, heißt **Definitionsmenge (D)**.

Beispiel:
$12x-4=16+2x$ Definitionsmenge $D=\mathbb{R}$, Grundmenge $G=\mathbb{R}$

Die Lösung erfolgt durch Äquivalenzumformungen.

	$12x-4$	$=$	$16+2x$	$\vert +4$	Auf beiden Seiten 4 addieren
$\Leftrightarrow$	$12x$	$=$	$20+2x$	$\vert -2x$	Auf beiden Seiten 2x subtrahieren
$\Leftrightarrow$	$10x$	$=$	20	$\vert :10$	Beide Seiten durch 10 dividieren
$\Leftrightarrow$	x	$=$	2		$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{2\}}}$ ist die Lösungsmenge.

Äquivalenzumformung ist eine Umformung, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.
Erlaubt ist:

Auf **beiden Seiten** einer Gleichung die gleiche **Zahl** oder den gleichen **Term** zu **addieren** oder zu **subtrahieren**.

Beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen **Zahl**, mit demselben **Term** zu **multiplizieren** oder durch die gleiche Zahl zu **dividieren**.

Nicht erlaubt bei einer Äquivalenzumformung sind:
Multiplikation mit Null, Division durch Null, sowie quadrieren beider Seiten.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Beispiel:

$$\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0 \quad D = \mathbb{R}\,,\, G = \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow x^2 = -12 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \}}}$ keine Lösung, denn $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$4u + 2 - 4(2u - 2) + 8(0{,}5u - 4) = -22 \quad D = \mathbb{R}\,,\, G = \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \ -22 = -22 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen, denn jedes $u \in \mathbb{R}$ führt zu einer wahren Aussage und ist somit eine Lösung.

Beispiel:

$\dfrac{2x}{x-1} = 3$ Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{\,1\,\}$, Grundmenge $G = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\frac{2x}{x-1} &&= 3 && \mid \cdot (x-1) && \text{beide Seiten mit } x-1 \text{ multiplizieren}\\
\Leftrightarrow\ & 2x &&= 3x - 3 && \mid -3x && \text{Auf beiden Seiten 3x subtrahieren}\\
\Leftrightarrow\ & -x &&= -3 && \mid : (-1) && \text{Beide Seiten durch } -1 \text{ dividieren}\\
\Leftrightarrow\ & x &&= 3 && && \Rightarrow \underline{\underline{L = \{3\}}} \text{ ist die Lösungsmenge, da } 3 \in D \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$1{,}5x + 14 = 0{,}5x - 2x + 8 \quad D = \mathbb{R}\,,\, G = \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow x = -2 \quad \Rightarrow L = \{\ \}$ denn $-2 \notin G$

Beispiel:

$ux - 2 = 8 - 2x$ mit $G = \mathbb{R}$ ist eine Parametergleichung

Die Variable u heißt Parameter oder Formvariable.

Die Variable x ist die Lösungsvariable.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von u.

$$\begin{aligned}
& ux - 2 &&= 8 - 2x && \mid +2x\\
\Leftrightarrow\ & ux + 2x - 2 &&= 8 && \mid +2\\
\Leftrightarrow\ & ux + 2x &&= 10 &&\\
\Leftrightarrow\ & x(u+2) &&= 10 && \mid : (u+2)\\
\Leftrightarrow\ & x &&= \frac{10}{u+2} &&
\end{aligned}$$

Die Division durch $u + 2$ ist nur erlaubt, wenn $u + 2 \neq 0$ ist, also für $u \neq -2$.

Für $u \neq -2$ hat die Gleichung die Lösung $x = \dfrac{10}{u+2}$

Als Lösungsmenge geschrieben: $L = \left\{ x \mid x = \dfrac{10}{u+2} \wedge u \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \right\}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Beispiel:
$3x+4>6 \quad G=\mathbb{R}$ Lösung durch Äquivalenzumformung:

$$\begin{array}{lllll|l} & 3x+4 & > & 6 & \mid -4 & \\ \Leftrightarrow & 3x & > & 2 & \mid :3 & \Rightarrow L=\left\{x \mid x>\frac{2}{3}\right\}_{\mathbb{R}} = \left]\frac{2}{3};\infty\right[\\ \Leftrightarrow & x & > & \frac{2}{3} & & \end{array}$$

Die Lösung dieser Ungleichung ist ein Intervall.

Beispiel:
Für welches Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt: $-3x+8<2$?

$$\begin{array}{lllll|l} & -3x+8 & < & 2 & \mid -8 & \\ \Leftrightarrow & -3x & < & -6 & \mid :(-3) & L=\{x \mid x>2\}_{\mathbb{R}} \text{ oder } I=\left]2;\infty\right[\text{ ist Lösungsintervall} \\ \Leftrightarrow & x & > & 2 & & \end{array}$$

Merke: Wird bei der Äquivalenzumformung einer Ungleichung diese auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Relationszeichen um.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de