

## Gleichungen und Ungleichungen

### Gleichungen und Ungleichungen als Aussageform

Zahlengleichungen- oder Ungleichungen mit Zahlen sind **Aussagen**

Bestimmungsgleichungen- oder Ungleichungen sind **Aussageformen**.

$$3 + 7 = 2 + 8 \quad \text{Gleichung}$$

$$8x + 2 = 18 \quad \text{Gleichung}$$

$$3 + 7 < 3 + 8 \quad \text{Ungleichung}$$

$$32 - x > 19 \quad \text{Ungleichung}$$

Gleichungen und Ungleichungen bestehen aus zwei Termen, rechts und links vom Relationszeichen.

Definition	Die Menge der Elemente $x$ , die eine Gleichung bzw. Ungleichung zu einer wahren Aussage führt, heißt <b>Lösungsmenge ( L )</b> oder Erfüllungsmenge.
------------	---

Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen bedeutet somit „Bestimmen der Lösungsmengen“.

Definition	Die Menge, der die Elemente zur Erfüllung der Gleichung oder Ungleichung entnommen werden dürfen, heißt <b>Grundmenge ( G )</b> .
------------	---

Definition	Die Menge, für die die mathematischen Terme, die in der Gleichung oder Ungleichung vorkommen, definiert sind, heißt <b>Definitionsmenge ( D )</b> .
------------	---

Beispiel:

$$12x - 4 = 16 + 2x \quad \text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R}, \text{ Grundmenge } G = \mathbb{R}$$

Die Lösung erfolgt durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{array}{lcl} 12x - 4 = 16 + 2x & | + 4 & \text{Auf beiden Seiten 4 addieren} \\ \Leftrightarrow 12x = 20 + 2x & | - 2x & \text{Auf beiden Seiten 2x subtrahieren} \\ \Leftrightarrow 10x = 20 & | : 10 & \text{Beide Seiten durch 10 dividieren} \\ \Leftrightarrow x = 2 & & \Rightarrow \underline{\underline{L = \{2\}}} \text{ ist die Lösungsmenge.} \end{array}$$

**Äquivalenzumformung** ist eine Umformung, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.

Erlaubt ist:

Auf **beiden Seiten** einer Gleichung die gleiche **Zahl** oder den gleichen **Term** zu **addieren** oder zu **subtrahieren**.

**Beide Seiten** einer Gleichung mit der gleichen **Zahl**, mit demselben **Term** zu **multiplizieren** oder durch die gleiche Zahl zu **dividieren**.

Nicht erlaubt bei einer Äquivalenzumformung sind:

Multiplikation mit Null, Division durch Null, sowie quadrieren beider Seiten.

Beispiel:

$$\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0 \quad D = \mathbb{R}, G = \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -12 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \{ \}}} \text{ keine Lösung, denn } x^2 \geq 0 \text{ f\u00fcr alle } x \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$4u + 2 - 4(2u - 2) + 8(0,5u - 4) = -22 \quad D = \mathbb{R}, G = \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -22 = -22 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \mathbb{R}}} \text{ Die Gleichung hat unendlich viele L\u00f6sungen, denn jedes } u \in \mathbb{R} \text{ f\u00fchrt zu einer wahren Aussage und ist somit eine L\u00f6sung.}$$

Beispiel:

$$\frac{2x}{x-1} = 3 \quad \text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{ Grundmenge } G = \mathbb{R}$$

$\frac{2x}{x-1} = 3$	$ \cdot(x-1)$	beide Seiten mit $x-1$ multiplizieren
$\Leftrightarrow 2x = 3x - 3$	$ -3x$	Auf beiden Seiten $3x$ subtrahieren
$\Leftrightarrow -x = -3$	$ \cdot(-1)$	Beide Seiten durch $-1$ dividieren
$\Leftrightarrow x = 3$		$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{3\}}}$ ist die L\u00f6sungsmenge, da $3 \in D$ ist.

Beispiel

$$1,5x + 14 = 0,5x - 2x + 8 \quad D = \mathbb{R}, G = \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \Rightarrow L = \{ \} \text{ denn } -2 \notin G$$

Beispiel:

$$ux - 2 = 8 - 2x \quad \text{mit } G = \mathbb{R} \text{ ist eine Parametergleichung}$$

Die Variable  $u$  hei\u00dft Parameter oder Formvariable.

Die Variable  $x$  ist die L\u00f6sungsvariable.

Bestimmen Sie die L\u00f6sungsmenge in Abh\u00e4ngigkeit von  $u$ .

$$\begin{aligned} ux - 2 &= 8 - 2x && | + 2x \\ \Leftrightarrow ux + 2x - 2 &= 8 && | + 2 \\ \Leftrightarrow ux + 2x &= 10 \\ \Leftrightarrow x(u+2) &= 10 && | : (u+2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{10}{u+2} \end{aligned}$$

Die Division durch  $u+2$  ist nur erlaubt, wenn  $u+2 \neq 0$  ist, also f\u00fcr  $u \neq -2$ .

$$\text{F\u00fcr } u \neq -2 \text{ hat die Gleichung die L\u00f6sung } x = \frac{10}{u+2}$$

$$\text{Als L\u00f6sungsmenge geschrieben: } L = \left\{ x \mid x = \frac{10}{u+2} \wedge u \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \right\}$$

Beispiel:

$3x + 4 > 6$   $G = \mathbb{R}$  Lösung durch Äquivalenzumformung:

$$\begin{array}{l} 3x + 4 > 6 \quad | -4 \\ \Leftrightarrow 3x > 2 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \end{array} \quad \left| \Rightarrow L = \left\{ x \mid x > \frac{2}{3} \right\}_{\mathbb{R}} = \left] \frac{2}{3}; \infty \right[ \right.$$

Die Lösung dieser Ungleichung ist ein Intervall.

Beispiel:

Für welches Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  gilt:  $-3x + 8 < 2$  ?

$$\begin{array}{l} -3x + 8 < 2 \quad | -8 \\ \Leftrightarrow -3x < -6 \quad | :(-3) \\ \Leftrightarrow x > 2 \end{array} \quad \left| L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{R}} \text{ oder } I = \right] 2; \infty[ \text{ ist Lösungsintervall} \right.$$

**Merke:** Wird bei der Äquivalenzumformung einer Ungleichung diese auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Relationszeichen um.

(C) Rudolf Brinkmann  
Original Word-Dokumente  
ohne Copyright-Vermerk  
erhalten Sie unter  
<http://www.brinkmann-du.de>