Zinseszinsrechnung

In der Zinseszinsrechnung beschäftigt man sich mit der Entwicklung von einmalig angelegten Kapitalbeträgen zu einem Zinssatz, der in der Regel im Zeitablauf fest bleibt.

Beispiel:
Eine Professorin legt am Ende eines Jahres ihr Weihnachtsgeld in Höhe von 4000 € auf ein Sparbuch mit 4 – jähriger Kündigungsfrist. Das Kreditinstitut vereinbart mit ihr einen Zinssatz von 5 %.
Wie entwickelt sich das Sparguthaben?

Das Anfangskapital beträgt K(0) = 4000. Am Ende des 1. Jahres hat sich das Kapital um die Zinsen des 1. Jahres erhöht.	$K(0) = 4000 \quad \text{Anfangskapital}$ $K(1) = K(0) + K(0) \cdot 0{,}05$ $K(1) = 4000 + 4000 \cdot 0{,}05$ $K(1) = 4000 \cdot (1 + 0{,}05) = 4000 \cdot 1{,}05$
Am Ende des 2. Jahres werden zu dem Kapital K(1) die Jahreszinsen des 2. Jahres addiert.	$K(2) = K(1) + K(1) \cdot 0{,}05$ $K(2) = 4000 \cdot 1{,}05 + 4000 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}05$ $K(2) = 4000 \cdot 1{,}05 \cdot (1 + 0{,}05) = 4000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$ $K(2) = 4000 \cdot 1{,}05^2$
Am Ende des 3. Jahres werden wieder die Zinsen von 5 % zu K(2) addiert.	$K(3) = K(2) + K(2) \cdot 0{,}05$ $K(3) = 4000 \cdot 1{,}05^2 + 4000 \cdot 1{,}05^2 \cdot 0{,}05$ $K(3) = 4000 \cdot 1{,}05^2 \cdot (1 + 0{,}05) = 4000 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}05$ $K(3) = 4000 \cdot 1{,}05^3$
Das endgültige Guthaben am Ende des 4. Jahres ergibt sich aus der Summe von K(3) und den Zinsen von K(3). Die Sparerin kann nach 4 Jahren über einen Betrag von 4862,03 € verfügen.	$K(4) = K(3) + K(3) \cdot 0{,}05$ $K(4) = 4000 \cdot 1{,}05^3 + 4000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 0{,}05$ $K(4) = 4000 \cdot 1{,}05^3 \cdot (1 + 0{,}05) = 4000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}05$ $K(4) = 4000 \cdot 1{,}05^4 = \underline{\underline{4862{,}03}}$
Nach n Jahren beträgt das Kapital somit:	$K(n) = K(0) \cdot 1{,}05^n$

Die Zinseszinsformel:

K(0) : Anfangskapital

K(n) : Guthaben nach n Jahren

p : Zinssatz in %

$q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$: Zinsfaktor

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \text{ mit } q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Beispiel 1

Anfangskapital: K(0) = 10000 €
Zinssatz : p = 6,5%
Laufzeit : n = 18 Jahre
gesucht : Guthaben nach 18 Jahren

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6,5}{100} = 1,065$$

$$K(18) = 10000 \cdot 1,065^{18} = \underline{\underline{31066,54}}$$

Guthaben nach 18 Jahren: 31066,54 €

Beispiel 2

Für einen Autokauf sollen in 5 Jahren 20000 € zur Verfügung stehen.
Welchen Betrag müsste man dafür jetzt zu 7% anlegen?

Vorüberlegung: Die Formel $K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

muss nach dem Anfangskapital K(0) umgestellt werden.

Formelumstellung:

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \quad |: q^n$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{K(n)}{q^n}}} = K(0) \text{ mit } q = 1 + \frac{p}{100}$$

Berechnung:

$$K(0) = \frac{K(n)}{q^n}$$

$$n = 5 \quad K(5) = 20000 \quad q = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$$

$$K(0) = \frac{20000}{1,07^5} = 14259,72$$

Antwort:
Es muss ein Betrag von 14259,72 € für 5 Jahre
zu 7% angelegt werden.

Beispiel 3
Zu welchem Zinssatz müssen 3325,29 € für 7 Jahre angelegt werden, damit am Ende des 7. Jahres
5000 € zur Verfügung stehen?

Vorüberlegung: Die Formel $K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

muss nach dem Zinssatz p umgestellt werden.

Formelumstellung:

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad |: K(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(n)}{K(0)} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | \sqrt[n]{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} = 1 + \frac{p}{100} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1 = \frac{p}{100} \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1\right) = p$$

Berechnung:

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1\right)$$

$$n = 7 \quad K(0) = 3325{,}29 \quad K(7) = 5000$$

$$\Leftrightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[7]{\frac{5000}{3325{,}29}} - 1\right) = 6\%$$

Antwort:
Damit nach 7 Jahren aus dem Anfangskapital
5000 € werden, muss der Zinssatz p = 6%
betragen.

Beispiel 4
Wie lange müssen 6808,24 € zu 6,5% angelegt werden, bis sie auf 12000 € gewachsen sind?

Vorüberlegung: Die Formel $K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

muss nach der Laufzeit n umgestellt werden.

Formelumstellung:

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \quad |: K(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(n)}{K(0)} = q^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\Leftrightarrow \lg \frac{K(n)}{K(0)} = \lg q^n = n \cdot \lg q \quad | \lg q$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = n$$

Berechnung:

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q}$$

$$K(0) = 6808{,}24 \quad K(n) = 12000 \quad q = 1 + \frac{6{,}5}{100} = 1{,}065$$

$$n = \frac{\lg \frac{12000}{6808{,}24}}{\lg 1{,}065} = 9$$

Antwort:
Um auf 12000 € anzuwachsen müssen 6808,24 € zu
6,5% 9 Jahre angelegt werden.

Zusammenfassung:

K(n) ist das n Jahre lang zu einem Zinssatz von p% verzinste Anfangskapital K(0) und lässt sich nach der Zinseszinsformel

$\boxed{K(n) = K(0) \cdot q^n}$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ berechnen.

Anfangskapital: $\boxed{K(0) = \frac{K(n)}{q^n}}$ Laufzeit: $\boxed{n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q}}$ Zinssatz: $\boxed{p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1 \right)}$

Aufgaben:

1. Auf welchen Betrag wachsen folgende Anfangskapitalien an?
   a) 1800 € bei 5% Zinssatz in 10 Jahren
   b) 6000 € bei 6,5% Zinssatz in 15 Jahren
   c) 25000 € bei 4% Zinssatz in 6 Jahren

2. Ein Vater legt am 01.01. 1996 ein Sparbuch über 1000 € für seine Tochter an. Über welchen Betrag kann die Tochter am 31.12. 2011 verfügen, wenn das Sparguthaben mit 3,5% verzinst wird?

3. Auf welchen Betrag wachsen 16000 € an, wenn das Guthaben 12 Jahre mit
   a) 4% b) 5,5% oder c) mit 8% verzinst wird?

4. Ein Betrag in Höhe von 6000 € wurde am 01.01. 1990 zu 4,5% angelegt. Welche Summe steht dem Anleger am 31.12. 1998 zur Verfügung?

5. Wie viel Zinsen bringen bei einer 5%igen Verzinsung unter Berücksichtigung von Zinseszinsen
4000 €, die vom 01.04.1990 bis zum 31.03. 1996 festgelegt wurden?

6. Ein Vater möchte, dass seinem Sohn am 31.12. 2010 ein Betrag von 30000 € ausgezahlt wird.
Welche Summe muss er am 01.01. 1996 anlegen, wenn er mit einer Verzinsung von 5,5% rechnet?

7. Eine junge Frau hat die Wahl zwischen folgenden Kapitalien:
12000 €, Auszahlung sofort, oder 22500 €, Auszahlung in 10 Jahren, oder 36000 €, Auszahlung in
20 Jahren. Welches Kapital ist – bezogen auf einen gemeinsamen Stichtag – am höchsten, wenn man von einer 6%igen Verzinsung ausgeht?

8. Ein Kapital in Höhe von 5000 € verdoppelt sich in 12 Jahren.
Welcher Zinssatz liegt bei dieser Berechnung zugrunde?

9. Zu welchem Zinssatz war ein Kapital von 5000 € ausgeliehen, wenn es in 5 Jahren auf 6535 € angewachsen ist?

10. In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 4% ?

11. In wie viel Jahren wächst ein Kapital von 10000 € bei einem Zinssatz von 5% auf 14774,55 € an?

12. In wie viel Jahren bringt ein Kapital von 15000 € bei 6%iger Verzinsung 5073,38 € Zinsen?

13. Ein Kapital hat sich in 9 Jahren verdoppelt. Zu welchem Prozentsatz wurde es verzinst?

14. Welchen Betrag muss ein Sparer heute bei einer Sparkasse einzahlen, wenn er bei 4,5%
Zinsen nach 8 Jahren über 20000 € verfügen will?

15. Wie lange muss ein Kapital zu 4,5% verzinst werden, bis es seinen dreifachen Wert erreicht hat?

16. a) Es werden 10000 € zu 6% angelegt. Welcher Betrag steht nach 5 Jahren zur Verfügung?
b) Für den Kauf eines Autos benötigt man 18000 €. Wann steht das Geld zur Verfügung?
c) Welcher Betrag müsste angelegt werden, damit das Geld für den Autokauf schon nach
5 Jahren zur Verfügung steht?

Lösungen:

Zu 1

a) $K(0) = 1800\ €\quad p = 5\%\quad n = 10\quad q = 1{,}05$

$K(10) = K(0)\cdot q^{10} = 1800\ €\ \cdot 1{,}05^{10} = \underline{\underline{2932{,}01\ €}}$

b) $K(0) = 6000\ €\quad p = 6{,}5\%\quad n = 15\quad q = 1{,}065$

$K(15) = K(0)\cdot q^{15} = 6000\ €\ \cdot 1{,}065^{15} = \underline{\underline{15431{,}04\ €}}$

b) $K(0) = 25000\ €\quad p = 4\%\quad n = 6\quad q = 1{,}06$

$K(6) = K(0)\cdot q^{6} = 25000\ €\ \cdot 1{,}04^{6} = \underline{\underline{31632{,}98\ €}}$

Zu 2

$1.1.1996 - 31.12.2011 \Rightarrow n = 16\quad K(0) = 1000\ €\quad p = 3{,}5\%\quad q = 1{,}035$

$K(16) = K(0)\cdot q^{16} = 1000\ €\ \cdot 1{,}035^{16} = \underline{\underline{1733{,}99\ €}}$

Zu 3

a) $K(0) = 16000\ €\quad n = 12\quad p = 4\%\quad q = 1{,}04$

$$K(12) = K(0)\cdot q^{12} = 16000\ €\cdot 1{,}04^{12} = \underline{\underline{25616{,}52\ €}}$$

b) $K(0) = 16000\ €\quad n = 12\quad p = 5{,}5\%\quad q = 1{,}055$

$$K(12) = K(0)\cdot q^{12} = 16000\ €\cdot 1{,}055^{12} = \underline{\underline{30419{,}32\ €}}$$

c) $K(0) = 16000\ €\quad n = 12\quad p = 8\%\quad q = 1{,}08$

$$K(12) = K(0)\cdot q^{12} = 16000\ €\cdot 1{,}08^{12} = \underline{\underline{40290{,}72\ €}}$$

Zu 4 1.1.1990 - 31.12.1998 $\Rightarrow$ $n = 9\quad K(0) = 6000\ €\quad p = 4{,}5\%\quad q = 1{,}045$

$$K(9) = K(0)\cdot q^{9} = 6000\ €\cdot 1{,}045^{9} = \underline{\underline{8916{,}57\ €}}$$

Zu 5 1.4.1990 - 31.3.1996 $\Rightarrow$ $n = 6\quad K(0) = 4000\ €\quad p = 5\%\quad q = 1{,}05$

$$Z = K(6) - K(0) = K(0)\cdot q^{6} - K(0) = K(0)\cdot\left[q^{6} - 1\right] = 4000\ €\cdot\left[1{,}05^{6} - 1\right] = \underline{\underline{1360{,}38\ €}}$$

Zu 6 1.1.1996 - 31.12.2010 $\Rightarrow$ $n = 15\quad K(15) = 30000\ €\quad p = 5{,}5\%\quad q = 1{,}055$

$$K(0) = \frac{K(15)}{q^{15}} = \frac{30000\ €}{1{,}055^{15}} = \underline{\underline{13437{,}99\ €}}$$

Es muss eine Summe von $\underline{\underline{K(0) = 13437{,}99\ €}}$ angelegt werden.

Zu 7 $p = 6\%$ Stichtag <u>heute</u> $q = 1{,}06$

Fall 1: 12000 € Auszahlung sofort $\Rightarrow$ $\underline{\underline{K(0) = 12000\ €}}$

Fall 2: 22500 € Auszahlung in 10 Jahren $\Rightarrow$ $K(0) = \dfrac{K(10)}{q^{10}} = \dfrac{22500\ €}{1{,}06^{10}} = \underline{\underline{12563{,}88\ €}}$

Fall 3: 36000 € Auszahlung in 20 Jahren $\Rightarrow$ $K(0) = \dfrac{K(20)}{q^{20}} = \dfrac{36000\ €}{1{,}06^{20}} = \underline{\underline{11224{,}97\ €}}$

Fall 2 beinhaltet das größte Kapital $K(0) = \underline{\underline{12563{,}88\ €}}$

Zu 8 $K(0) = 5000\ €\quad K(12) = 10000\ €\quad n = 12$

$$p = 100\cdot\left[\left(\frac{K(12)}{K(0)}\right)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 100\cdot\left[\left(\frac{10000\ €}{5000\ €}\right)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = \underline{\underline{5{,}95\%}}$$

Bei der Berechnung liegt ein Zinssatz von $\underline{\underline{p = 5{,}95\%}}$ zugrunde.

Zu 9 K(0) = 5000 € K(5) = 6535 € n = 5

$$p = 100 \cdot \left[\left(\frac{K(5)}{K(0)} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[\left(\frac{6535\ €}{5000\ €} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right] = \underline{\underline{5{,}5\%}}$$

Bei der Berechnung liegt ein Zinssatz von $\underline{\underline{p = 5{,}5\%}}$ zugrunde.

Zu 10 p = 4% K(n) = 2·K(0) q = 1,04

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}04} = 17{,}7 \approx \underline{\underline{18 \text{ Jahre}}}$$

Bei einem Zinssatz von 4% verdoppelt sich ein Kapital in etwa $\underline{\underline{\text{18 Jahren}}}$

Zu 11 p = 5% K(0) = 10000 € K(n) = 14774,55 € q = 1,05

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg \frac{14774{,}55\ €}{10000\ €}}{\lg 1{,}05} \approx \underline{\underline{8 \text{ Jahre}}}$$

Die Laufzeit beträgt $\underline{\underline{n \approx 8 \text{ Jahre}}}$

Zu 12 p = 6% K(0) = 15000 € Zinsen: Z = 5073,38 €

q = 1,06 K(n) = K(0) + Z = 15000 € + 5073,38 € = 20073,38 €

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg \frac{20073{,}38\ €}{15000\ €}}{\lg 1{,}06} \approx \underline{\underline{5 \text{ Jahre}}}$$

Die Laufzeit beträgt $\underline{\underline{n \approx 5 \text{ Jahre}}}$

Zu 13 $n = 9$ $K(9) = 2 \cdot K(0)$ ges. p

$$p = 100 \cdot \left[\left(\frac{K(9)}{K(0)} \right)^{\frac{1}{9}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[\left(\frac{2K(0)}{K(0)} \right)^{\frac{1}{9}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[(2)^{\frac{1}{9}} - 1 \right] = 8$$

Das Kapital war zu $\underline{\underline{8\%}}$ verzinst.

Zu 14 $n = 8$ $p = 4{,}5\ \%$ $K(8) = 20000\ €$ $q = 1{,}045$

$$K(0) = \frac{K(8)}{q^8} = \frac{20000\ €}{1{,}045^8} = \underline{\underline{14063{,}70\ €}}$$

Der Betrag K(0) beträgt $\underline{\underline{14063{,}70\ €}}$

Zu 15 $p = 4{,}5\ \%\quad K(n) = 3 \cdot K(0)\quad q = 1{,}045$

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg \frac{3K(0)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}045} \approx \underline{\underline{25 \text{ Jahre}}}$$

Die Laufzeit beträgt etwa n = 25 Jahre.

Zu 16

a) $K(0) = 10000\ €\quad p = 6\%\quad n = 5\quad q = 1{,}06$

$$K(6) = K(0) \cdot q^5 = 10000\ € \cdot 1{,}06^5 = \underline{\underline{13382{,}26\ €}}$$

In 5 Jahren steht ein Betrag von 13382,26 € zur Verfügung.

b) $p = 6\%\quad K(0) = 10000\ €\quad K(n) = 18000\ €\quad q = 1{,}06$

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = \frac{\lg \frac{18000\ €}{10000\ €}}{\lg 1{,}06} = 10 \text{ Jahre}$$

Das Geld steht in n = 10 Jahren zur Verfügung.

c) $p = 6\%\quad n = 5\quad K(5) = 18000\ €\quad q = 1{,}06$

$$K(0) = \frac{K(5)}{q^5} = \frac{18000\ €}{1{,}06^5} = 13450{,}65\ €$$

Für den Autokauf müsste ein Betrag von 13450,65 € angelegt werden.