

Wurzelgleichungen und Exponentialgleichungen mit Lösungsbeispielen

Gleichungen in denen Wurzelterme vorkommen nennt man **Wurzelgleichungen**. Im folgenden Beispiel soll das Lösungsverfahren genauer betrachtet werden.

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge der Gleichung: $3 \cdot \sqrt{5x+1} = 4 \cdot \sqrt{2x+3}$

Wie bei allen Gleichungen gehören zur Lösungsmenge von Wurzelgleichungen nur Elemente aus der Definitionsmenge D, die für jede Gleichung zu bestimmen ist.

Bezeichnet man den linken Wurzelterm mit T_1 und den rechten mit T_2 so gilt:	$T_1 = \sqrt{5x+1}$ $T_2 = \sqrt{2x+3}$
Da die Definitionsmenge von Quadratwurzeln keine negativen Radikanden in \mathbb{R} zulässt, gilt:	$5x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+3 \geq 0$ $5x \geq -1 \quad \wedge \quad 2x \geq -3$ $x \geq -\frac{1}{5} \quad \wedge \quad x \geq -\frac{3}{2}$
Definitionsmenge von T_1 :	$D(T_1) = \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{5} \right\}_{\mathbb{R}}$
Definitionsmenge von T_2 :	$D(T_2) = \left\{ x \mid x \geq -\frac{3}{2} \right\}_{\mathbb{R}}$
Die Definitionsmenge D ist die Schnittmenge der Definitionsmengen, von T_1 und T_2 . Es gehören also nur solche Elemente zur Definitionsmenge, die größer oder gleich $-1/5$ sind.	$D = D(T_1) \cap D(T_2)$ $= \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{5} \wedge x \geq -\frac{3}{2} \right\}_{\mathbb{R}}$ $= \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{5} \right\}_{\mathbb{R}}$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge müssen die in der Gleichung vorkommenden Quadratwurzeln beseitigt werden.

Das geschieht durch Quadrieren beider Seiten der Gleichung.

Ausmultiplizieren und Äquivalenzumformungen nach x.

$3 \cdot \sqrt{5x+1} = 4 \cdot \sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow (3 \cdot \sqrt{5x+1})^2 = (4 \cdot \sqrt{2x+3})^2$ $\Leftrightarrow 9(5x+1) = 16(2x+3)$ $\Leftrightarrow 45x+9 = 32x+48$ $\Leftrightarrow 13x = 39$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3 \in D}}$	<p>Zur Probe wird das Lösungselement in die Wurzelgleichung eingesetzt:</p> $3 \cdot \sqrt{5x+1} = 4 \cdot \sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 3 + 1} = 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 + 3}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt{9}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ $\Leftrightarrow 12 = 12 \quad (\text{w})$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{L = \{3\}}}$
---	--

Durch das Einsetzen von $x = 3$ in die Wurzelgleichung ergibt sich eine wahre Aussage, die die Richtigkeit der Lösung bestätigt.

<p>Folgendes Problem kann sich ergeben:</p> <p>Ist das Potenzieren der Quadratwurzeln eine Äquivalenzumformung, oder kann durch das Quadrieren noch ein weiteres Element hinzukommen, das gar nicht zu der ursprünglichen Gleichung gehört?</p>	<p>Beispiel:</p> $x = 3$ $\Leftrightarrow x^2 = 9 \quad \sqrt{}$ $\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x = 3 \vee -x = 3$ $\Rightarrow x = 3 \vee x = -3$ $\Rightarrow L = \{-3; 3\}$
---	---

Durch das Quadrieren ist also das Element -3 zusätzlich hinzugekommen. Es ist daher nicht nur wichtig, **sondern unbedingt erforderlich**, nach einer Umformung durch Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung die **Probe** zu machen.

Beispiel:

$\sqrt{x^2 - 1} = x - 3$ <p>Definitionsbereich:</p> $x^2 - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^2 \geq 1$ $\Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \vee -x \geq 1$ $\Rightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid -1 < x < 1\}}_{\mathbb{R}}}$	<p>Lösung:</p> $\sqrt{x^2 - 1} = x - 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - 6x + 9$ $\Leftrightarrow 6x = 10$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}} \wedge x \in D$	<p>Probe durch einsetzen:</p> $\sqrt{x^2 - 1} = x - 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{5}{3} - \frac{9}{3}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \text{ (f)} \Rightarrow \underline{\underline{L = \{\}}}$
--	---	---

Das bedeutet, es gibt keinen Wert für x der obige Gleichung erfüllt.

Beispiel:

$\sqrt{7x+8} = 2x-2$ <p>Definitionsbereich:</p> $7x+8 \geq 0$ $\Leftrightarrow 7x \geq -8$ $\Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{7}$ $\Rightarrow D = \left\{ x \mid x \geq -\frac{8}{7} \right\}_{\mathbb{R}}$	<p>Lösung:</p> $\sqrt{7x+8} = 2x-2$ $\Leftrightarrow 7x+8 = (2x-2)^2$ $\Leftrightarrow 7x+8 = 4x^2 - 8x + 4$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{4}x - 1 = 0$ $\Rightarrow p = -\frac{15}{4} \quad q = -1$ $x_1 = \frac{15}{8} + \sqrt{\frac{225}{64} + \frac{64}{64}} = \frac{15}{8} + \sqrt{\frac{289}{64}}$ $= \frac{15}{8} + \frac{17}{8} = \frac{32}{8} = 4$ $x_2 = \frac{15}{8} - \frac{17}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$
<p>Probe für $x_1 = 4$</p> $\sqrt{7x+8} = 2x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{7 \cdot 4 + 8} = 2 \cdot 4 - 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{36} = 6$ $\Leftrightarrow 6 = 6 \quad (w)$	<p>Probe für $x_2 = -\frac{1}{4}$</p> $\sqrt{7x+8} = 2x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 8} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{7}{4} + \frac{32}{4}} = -\frac{2}{4} - \frac{8}{4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{10}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \quad (f) \Rightarrow -\frac{1}{4} \notin L$
<p>Lösung: $\sqrt{7x+8} = 2x-2 \Rightarrow L = \underline{\underline{\{4\}}}$</p>	

Beispiel:

$$3 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3}$$

Definitionsbereich:

$$\Rightarrow x-2 \geq 0 \quad \wedge \quad x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \quad \wedge \quad x \geq -5 \quad \wedge \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D = \{x \mid x \geq 2\}_{\mathbb{R}}}}$$

Lösung:

$$3 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow (3 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+5})^2 = (\sqrt{2x+3})^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (x-2) - 6\sqrt{(x-2)(x+5)} + x+5 = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 9x - 18 - 6\sqrt{(x-2)(x+5)} + x+5 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 16 - 6\sqrt{(x-2)(x+5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 - 3\sqrt{(x-2)(x+5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 = 3\sqrt{(x-2)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow (4x - 8)^2 = [3\sqrt{(x-2)(x+5)}]^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 64x + 64 = 9(x-2)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 64x + 64 = 9(x^2 + 5x - 2x - 10)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 64x + 64 = 9x^2 + 27x - 90$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 91x + 154 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 22 = 0$$

$$\Rightarrow p = -13 \quad q = 22$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{88}{4}}$$

$$= \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{13}{2} + \frac{9}{2} = \frac{22}{2} = \underline{\underline{11}}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{13}{2} - \frac{9}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

Probe für $x = 11$

$$3 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{11-2} - \sqrt{11+5} = \sqrt{22+3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{16} = \sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4 = 5 \quad (w) \Rightarrow 11 \in L$$

Probe für $x = 2$

$$3 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{2-2} - \sqrt{2+5} = \sqrt{2 \cdot 2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 0 - \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{7} = \sqrt{7} \quad (f)$$

$$\Rightarrow 2 \notin L$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$L = \underline{\underline{\{11\}}}$$

Exponentialgleichungen

Aussageformen, bei denen die Lösungsvariable in Exponenten von Wurzeln oder Potenzen vorkommen, heißen Exponentialgleichungen oder – Ungleichungen.

Die Lösungsmengen solcher Aussageformen lassen sich meistens durch Anwendung der Logarithmengesetze ermitteln.

Beispiel:

$2^{3x+4} = 1024$ $\Leftrightarrow 2^{3x+4} = 2^{10} \quad \lg$ $\Leftrightarrow \lg(2^{3x+4}) = \lg(2^{10})$ $\Leftrightarrow (3x+4) \cdot \lg 2 = 10 \cdot \lg 2 \quad : \lg 2$ $\Leftrightarrow 3x+4 = 10 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$	<p>Probe durch Einsetzen:</p> $2^{3x+4} = 1024$ $\Leftrightarrow 2^{3 \cdot 2+4} = 2^{10}$ $\Leftrightarrow 2^{10} = 2^{10} \quad (w)$ $\underline{\underline{L = \{2\}}}$
---	--

Lösung durch Exponentenvergleich: $2^{3x+4} = 2^{10} \Leftrightarrow 3x+4 = 10$

Eine Lösung mittels Exponentenvergleich ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Aussageform so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben.

Beispiel:

$3 \cdot 2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-2} \quad \lg$ $\Leftrightarrow \lg(3 \cdot 2^{x+3}) = \lg(64 \cdot 3^{x-2})$ $\Leftrightarrow \lg 3 + (x+3) \cdot \lg 2 = \lg 64 + (x-2) \cdot \lg 3$ $\Leftrightarrow (x+3) \cdot \lg 2 - (x-2) \cdot \lg 3 = \lg 64 - \lg 3$ $\Leftrightarrow x \lg 2 + 3 \lg 2 - x \lg 3 + 2 \lg 3 = \lg 64 - \lg 3$ $\Leftrightarrow x \lg 2 - x \lg 3 = \lg 64 - \lg 3 - 3 \lg 2 - 2 \lg 3$ $\Leftrightarrow x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 64 - 3 \lg 3 - 3 \lg 2$ $\Leftrightarrow x = \frac{\lg 64 - 3 \lg 3 - 3 \lg 2}{(\lg 2 - \lg 3)} = 3$	<p>Probe durch Einsetzen:</p> $3 \cdot 2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-2}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{3+3} = 64 \cdot 3^{3-2}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot 2^6 = 64 \cdot 3$ $\Leftrightarrow 3 \cdot 64 = 64 \cdot 3 \quad (w)$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{3\}}}$
--	--

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden.

Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Beispiel:

$$90 \cdot 3^{3x-2} - 9^{3x-2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3x-2} - (3^2)^{3x-2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3x-2} - 3^{2 \cdot (3x-2)} - 729 = 0$$

Substitution:

$$3^{3x-2} = z \quad 3^{2(3x-2)} = z^2$$

$$\Rightarrow 90 \cdot z - z^2 - 729 = 0 \quad (\text{quadr. Gl.})$$

$$\Rightarrow z_1 = 9 \quad \vee \quad z_2 = 81$$

Einsetzen von z_1 bzw. von z_2 in den Substitutionsterm z

$$3^{3x-2} = z_1 \quad 3^{3x-2} = z_2$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x-2} = 9 \quad 3^{3x-2} = 81$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x-2} = 3^2 \quad 3^{3x-2} = 3^4$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = 2 \quad 3x - 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = 2$$

Probe für $x_1 = \frac{4}{3}$

$$90 \cdot 3^{3x_1-2} - 9^{3x_1-2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} - 9^{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^2 - 9^2 - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (w)$$

Probe für $x_2 = 2$

$$0 \cdot 3^{3x_2-2} - 9^{3x_2-2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3 \cdot 2 - 2} - 9^{3 \cdot 2 - 2} - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^4 - 9^4 - 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (w)$$

$$L = \left\{ \frac{4}{3}; 2 \right\}$$