

Verknüpfung von Aussagen

Werden Aussagen miteinander verknüpft, so entstehen zusammengesetzte Aussagen, deren Wahrheitsgehalt in der angegebenen Verbindung wieder überprüft werden kann.

Die „Und“ – Verknüpfung (Konjunktion)

Eine Tresor ist durch zwei Schlösser gesichert.

Wie bekommen wir ihn auf? Welche Bedingung muss erfüllt sein?

Die Tresortür lässt sich nur öffnen, wenn beide Schlösser geöffnet werden.

Bedingung: Schloss 1 **und** Schloss 2 müssen geöffnet sein.

Konjunktion	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr ist, wenn sowohl A_1 als auch A_2 wahr ist, so heißt diese Verknüpfung Konjunktion .
	Verknüpfungszeichen und: \wedge (logisch und)

Beispiel:

A : Duisburg liegt am Rhein.

$$w(A) = W$$

B : Hamburg liegt an der Elbe.

$$w(B) = W$$

$C = A \wedge B$:

Duisburg liegt am Rhein \wedge Hamburg liegt an der Elbe. $w(C) = W$

X : Alle Autos haben Räder.

$$w(X) = W$$

Y : Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos.

$$w(Y) = F$$

$Z = X \wedge Y$:

Alle Autos haben Räder \wedge alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Z) = F$

Beispiel:

A_1 : 4 ist eine gerade Zahl A_2 : $4 > 2 \Rightarrow w(A_1) = W \quad w(A_2) = W$

Verknüpfung: A_1 und A_2

A_{12} : 4 ist eine gerade Zahl und $4 > 2 \Rightarrow w(A_{12}) = W$

Beispiel:

Wahrheitstafel			$A_1(x) : x - 3 = 5 \quad A_2(x) : x < 10$
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \wedge A_2)$	für $x = 9$ gilt:
W	W	W	$A_1 : 9 - 3 = 5 \quad A_2 : 9 < 10 \Rightarrow w(A_1) = F \quad w(A_2) = W$
W	F	F	Verknüpfung:
F	W	F	$A_{12} := A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_{12} : 9 - 3 = 5 \wedge 9 < 10$
F	F	F	$\Rightarrow w(A_{12}) = \underline{\underline{F}}$

Merke	Die Konjunktion zweier Aussagen A_1 und A_2 ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
-------	---------------------------------------------------------------------------------------------------

Übung:

Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Konjunktion an:

- A : München liegt an der Isar und Köln liegt am Rhein.
- B : Heute ist Montag und die Sonne scheint.
- C : Manchmal regnet es und manche Schüler lieben Mathematik.
- D : 4 ist eine gerade Zahl und größer als 7.

Lösung :

a) $w(A) = W$	b) $w(B) = W$ oder F	c) $w(C) = W$	d) $w(D) = F$
---------------	------------------------	---------------	---------------

Die „Oder“ – Verknüpfung (Disjunktion)

Der Tresor ist für Unbefugte schon dann nicht zu öffnen, wenn eins der beiden Schlösser geschlossen ist, also Schloss 1 oder Schloss 2. Beide Schlösser erhöhen die Sicherheit.

Disjunktion	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage immer dann wahr ist, wenn entweder die eine oder die andere oder beide Aussagen wahr sind, so heißt diese Verknüpfung Disjunktion
	Verknüpfungszeichen oder: \vee (logisch oder)

Beispiel:

A : Duisburg liegt am Rhein. $w(A) = W$

B : Hamburg liegt an der Mosel. $w(B) = F$

$C = A \vee B$:

Duisburg liegt am Rhein \vee Hamburg liegt an der Mosel. $w(C) = W$

X : Alle Autos haben Räder. $w(X) = W$

Y : Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Y) = F$

$Z = X \vee Y$:

Alle Autos haben Räder \vee alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Z) = W$

Beispiel:

Wahrheitstafel			$A_1(x) : 2x = 14$ $A_2(x) : x \geq 8$
$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \vee A_2)$	für $x = 7$ gilt:
W	W	W	$A_1 : 2 \cdot 7 = 14$ $A_2 : 7 \geq 8 \Rightarrow w(A_1) = W$ $w(A_2) = F$
W	F	W	Verknüpfung:
F	W	W	$A_{12} := A_1 \vee A_2 \Rightarrow A_{12} : 2 \cdot 7 = 14 \vee 7 \geq 8$
F	F	F	$\Rightarrow w(A_{12}) = \underline{\underline{W}}$

Merke	Die Disjunktion zweier Aussagen A_1 und A_2 ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.
-------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Übung:

Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Disjunktion an:

- A : München liegt an der Isar oder Köln liegt am Rhein.
- B : Heute ist Montag oder die Sonne scheint.
- C : Heute regnet es oder manche Schüler lieben Mathematik.
- D : 4 ist eine gerade Zahl oder größer als 7.

Lösung :

a) $w(A) = W$	b) $w(B) = W$ oder F	c) $w(C) = W$	d) $w(D) = W$
---------------	------------------------	---------------	---------------

Die Implikation

Verknüpfungszeichen **wenn ... dann** \rightarrow

Implikation	Sind zwei Aussagen A_1 und A_2 so miteinander verknüpft, dass aus der Aussage A_1 die Aussage A_2 logisch folgt , so heißt diese Verknüpfung Implikation .	Wahrheitstafel		
		$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \rightarrow A_2)$
		W	W	W
		W	F	F
		F	W	W
F	F	W		

Merke	Die Implikation zweier Aussagen A_1 und A_2 ist genau dann falsch, wenn A_1 wahr und A_2 falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr.
-------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Die Äquivalenz

Verknüpfungszeichen **genau dann ... wenn** \Leftrightarrow

Bijunktion	Die wechselseitige Implikation heißt Bijunktion oder Äquivalenz	Wahrheitstafel		
		$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \Leftrightarrow A_2)$
		W	W	W
		W	F	F
		F	W	F
F	F	W		

Die Wahrheitstafel entspricht der Implikation, dabei können die Aussagen A_1 und A_2 jedoch vertauscht werden. Die Verknüpfung der beiden Aussagen über die Äquivalenz führt genau dann zu einer wahren Aussage, wenn der Wahrheitsgehalt beider Aussagen gleich (äquivalent) ist.

Beispiel:

Ein mathematischer Satz lautet:

Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar,
so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

A_1 : Die Quersumme der Zahl x ist durch 3 teilbar

A_2 : Die Zahl x ist durch 3 teilbar

$x = 39$ Quersumme = 12 $3 \mid 12$ und $3 \mid 39$

A_1 : Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar

$\Rightarrow A_2$: Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

A_2 : Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

$\Rightarrow A_1$: Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar

A_1 : Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar

$\Leftrightarrow A_2$: Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

Die Negation

Verknüpfungszeichen **nicht** \neg

Negation	Die Negation einer Aussage ist immer dann wahr, wenn die Aussage falsch ist, und immer dann falsch, wenn die Aussage wahr ist
-----------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Wahrheitstafel	A : 5 ist eine ungerade Zahl $\Rightarrow w(A) = W$ $\neg A$: 5 ist keine ungerade Zahl $\Rightarrow w(A) = F$						
<table border="1"> <tr> <td>$w(A)$</td> <td>$w(\neg A)$</td> </tr> <tr> <td>W</td> <td>F</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>W</td> </tr> </table>		$w(A)$	$w(\neg A)$	W	F	F	W
$w(A)$		$w(\neg A)$					
W		F					
F	W						

Satz	Die doppelte Negation einer Aussage führt wieder zur ursprünglichen Aussage
------	-----------------------------------------------------------------------------

Beispiel:

A : Der Schüler ist **fähig** die Aufgabe zu lösen

$\neg A$: Der Schüler ist **unfähig** die Aufgabe zu lösen

$\neg(\neg A)$: Der Schüler ist **nicht unfähig** die Aufgabe zu lösen

Zusammenfassung:

Konjunktion

$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \wedge A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Disjunktion

$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \vee A_2)$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Implikation

$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \rightarrow A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Äquivalenz

$w(A_1)$	$w(A_2)$	$w(A_1 \leftrightarrow A_2)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Negation

$w(A)$	$w(\neg A)$
W	F
F	W