Exponentialgleichungen

Definition Gleichungen, bei denen die Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz auftritt, werden **Exponentialgleichungen** genannt.

Beispiele für Exponentialgleichungen:

$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0$ Exponentialgleichung zur Basis $e\approx 2{,}718$ (Eulersche Zahl).

$3^x+3^{x+1}-3^{x-1}=4$ Exponentialgleichung zur Basis 3.

$a^{2x}+a^x-a^{x+1}=b$ Exponentialgleichung zur Basis a.

$a^x-b^{2x}+c^{x+1}=d$ Exponentialgleichung mit unterschiedlichen Basen.

In vielen Fällen sind Exponentialgleichungen nur mit Näherungsverfahren, die hier nicht behandelt werden sollen, lösbar.
Exponentialgleichungen, die im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen auftreten, sind oft durch geeignete Umformungen und durch Anwendung der Potenz- und Logarithmengesetze lösbar.

Im Folgenden sollen die wichtigsten Lösungsmöglichkeiten dargestellt werden.
Da in Naturwissenschaft und Technik der **Basis e** in Bezug auf Wachstumsprozesse eine besondere Bedeutung zukommt, sollen hier nur Exponentialgleichungen zur Basis e betrachtet werden.

Lösungsmethoden für Exponentialgleichungen

Lösung mittels Exponentenvergleich

$e^{2x+4}-e^{x-1}=0$

ist eine Exponentialgleichung, die nach folgender Umformung

$e^{2x+4}=e^{x-1}$

über den Exponentialvergleich gelöst werden kann.

$$e^{2x+4}=e^{x-1}\Leftrightarrow 2x+4=x-1\,|-x\Leftrightarrow x+4=-1\,|-4\Rightarrow x=-5$$

Probe:

$$e^{-10+4}-e^{-5-1}=e^{-6}-e^{-6}=0$$

Eine Lösung mittels **Exponentenvergleich** ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben. Das ist leider jedoch nicht immer möglich, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Lösung mittels Logarithmieren

$$\frac{1}{2e^x}-3=0\,|+3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x}=3\,|\cdot 2e^x \Leftrightarrow 1=6\cdot e^x\,|:6 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{6}$$

Hier ist kein Exponentialvergleich möglich.
Der Ansatz erfolgt über Logarithmieren:

$$\ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1}=\underbrace{\ln(1)}_{0}-\ln(6) \Leftrightarrow x=-\ln(6)$$

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.
Jedoch Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Lösung mittels Substitution

$$e^{2x}-5e^x+4=0 \qquad \text{Substitution}: e^x=u \text{ und } e^{2x}=u^2$$

$\Rightarrow u^2-5u+4=0$ ist eine quadratische Gleichung mit der Variablen u.

$$p=-5\,;\,q=4 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \\ u_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \end{array} \right.$$

Rücksubstitution und Lösung durch Logarithmieren

$u_1=4 \Leftrightarrow e^{x_1}=4\,|\ln(\ ) \Rightarrow x_1=\ln(4)\approx 1{,}386$

$u_2=1 \Leftrightarrow e^{x_2}=1\,|\ln(\ ) \Rightarrow x_2=\ln(1)=0$

Ausführliche Beispiele zu Exponentialgleichungen

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$

$\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid :2$

Lösung durch Logarithmieren

$\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3 \cdot e^{x}\right)$

$\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$

$\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + x \cdot \ln(e)$

$\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid :2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(3)$

Probe:

$2e^{3 \cdot \frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$

$x \cdot e^{x} - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(e^{x} - 3\right) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und

$e^{x} - 3 = 0 \mid +3$

Lösung durch Logarithmieren

$\Leftrightarrow e^{x} = 3 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x_2 = \ln(3)$

Probe:

$x_1 = 0$

$0 \cdot e^{0} - 3 \cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0\ (w)$

$x_2 = \ln(3)$

$\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0\ (w)$

$e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0$ Substitution: $e^x = u \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p = -\frac{17}{2}\,;\, q = 4\,;$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$

$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$

$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Rücksubstitution

$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^{x_1} = 8 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right) = \ln(8)$

$\Leftrightarrow x_1 = \ln(8)$

$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x_2} = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x_2 \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$

$\Leftrightarrow x_2 = -\ln(2)$

$\frac{2}{1+e^x} = -2\frac{e^x - 4}{\left(1+e^x\right)^2} \mid :2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x - 4}{\left(1+e^x\right)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)} = -\frac{e^x - 4}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x - 4}{\left(1+e^x\right)^2} \mid \cdot\left(1+e^x\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+e^x = -\left(e^x - 4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x = -e^x + 4 \mid +e^x - 1$

$\Leftrightarrow 2e^x = 3 \mid \ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2\cdot e^x\right) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln(2) + \ln\left(e^x\right) = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2) + x\cdot\ln(e) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln(2) + x = \ln(3) \mid -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3) - \ln(2)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p = -3\,;\, q = 2\,;$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Rücksubstitution

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \mid \ln(\;)$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x + 2 = \ln(2) \mid -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2 + \ln(2)}}$

$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \mid \ln(\;)$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \mid -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

Training Expgl1: Exponentialgleichungen

Lösen Sie die Exponentialgleichungen mit den von Ihnen bekannten Methoden

1.)	$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0$	2.)	$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1$
3.)	$\frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0$	4.)	$(3+2x)e^{x-1} = 0$
5.)	$-2x^2e^{-x+2} = 0$	6.)	$-\frac{1}{5}e^{x} - 1 + 10e^{-x} = 0$
7.)	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$	8.)	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$
9.)	$\frac{2x}{e^{x}+1} = 0$	10.)	$(2-e^{x})^2 = (e^{x}-3)^2$