Die Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl

Jemand gewinnt 120 €, wir sagen auch er gewinnt einen Geldbetrag von 120 €.
Jemand bekommt einen Strafzettel über 120 €, wir sagen auch er hat einen Geldbetrag von 120 € zu zahlen.
Finanztechnisch bedeutet der Gewinn ein Plus und die Strafe ein Minus.

Also: Gewinn $+120$ € Strafzettel -120 €

In beiden Fällen handelt es sich um 120 €.

Der Betrag einer reellen Zahl ergibt sich, wenn das Vorzeichen auf + gewandelt wird.

Beispiele:

$|4| = 4$ $|5{,}12| = 5{,}12$ $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$|-4| = 4$ $|-5{,}12| = 5{,}12$ $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

Nicht ganz so einfach ist es, wenn wir den Betrag einer Variablen x bestimmen wollen.
| x | = x gilt leider nicht für alle reellen Zahlen. Zum Beispiel:

$x = 5 \Rightarrow |x| = x$ denn $|5| = 5$ ist wahr

$x = -5 \Rightarrow |x| = x$ denn $|-5| = -5$ ist falsch

Die Vermutung $|x| = x$ ist also nur richtig, wenn $x \geq 0$ ist.

Für $x < 0$ ist sie falsch.

Wir müssen bei der Betragsbestimmung von Variablen also zwei Fälle unterscheiden:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel: $x = 5$ da $x > 0$ ist gilt $|x| = x$ denn $|5| = 5$

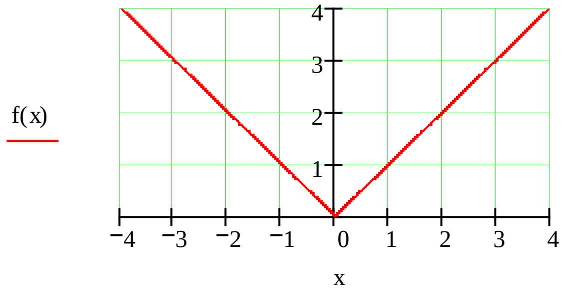
$x = -5$ da $x < 0$ ist gilt $|x| = -x$ denn $|-5| = -(-5) = 5$

Der Betrag einer reellen Zahl ist immer positiv.
Der Betrag gibt die Größe einer Zahl an, ohne dabei auf das Vorzeichen zu achten.

Betragsfunktion

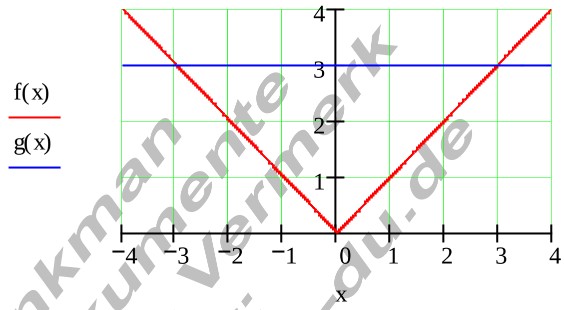
Wie sieht der Graph der Betragsfunktion y = f(x) = | x | aus?
Dazu legen wir eine Wertetabelle an.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y=\lvert x\rvert$	4	3	2	1	0	1	2	3	4



Aufgabe: Berechnen Sie alle x für die gilt: y = f(x) = | x | = 3
Es gibt für x offenbar zwei Lösungen:

$x_1 = 3$, denn | 3 | = 3 und
$x_2 = -3$, denn | -3 | = 3



Die Lösung einer Betragsgleichung findet man durch Fallunterscheidung:
Fall I: die Betragszeichen einfach weglässt $|x_1| = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}}$

Fall II: vorher mit (-1) multipliziert $|-x_2| = 3 \Rightarrow -x_2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -3}}$

Beispiel 1

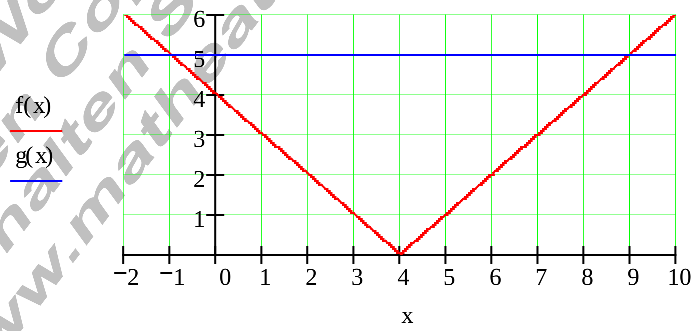
$y = f(x) = |x-4| = 5$

Fall I: $x - 4 = 5$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 9}}$

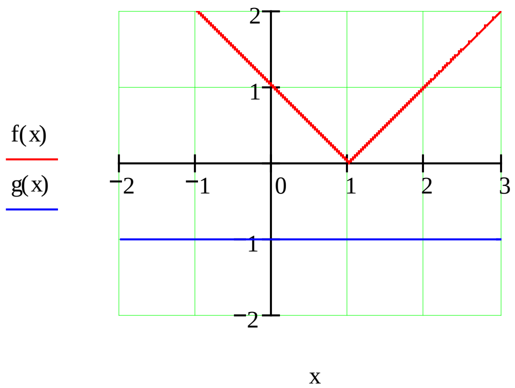
Fall II: $-(x-4) = 5$

$\Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -1}}$



Beispiel 2

$y = f(x) = |x-1| = -1$ hier gibt es keine Lösung, da der Betrag einer reellen Zahl immer positiv ist



Beispiel 3

$y = f(x) = |2 + x| = 0$

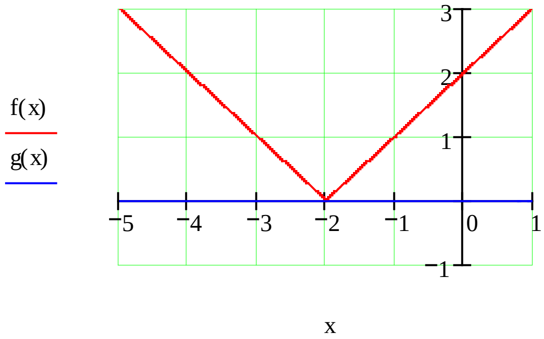
Fall I: $2 + x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -2}}$

Fall II: $-(2 + x) = 0$

$\Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

hier gibt es nur eine Lösung

$\underline{\underline{x_1 = x_2 = -2}}$



Eine Betragsgleichung hat entweder <u>keine</u>, <u>eine</u> oder <u>zwei</u> Lösungen.

<u>Verschiebungen der Betragsfunktion y = f(x) = | x |</u>

Verschiebung in y – Richtung.
Untersuchen Sie für verschiedene Werte von b die Funktion

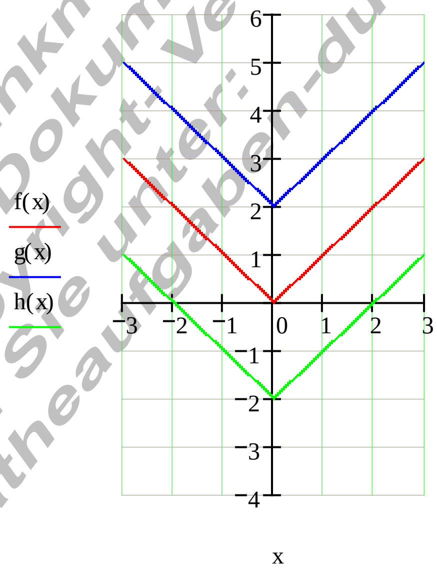
$y = f(x) = |x| + b$

und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$y = f(x) = |x|$

$y = g(x) = |x| + 2$

$y = h(x) = |x| - 2$



Die Verschiebung erfolgt längs der Ordinatenachse, wobei die Richtung der Verschiebung durch das Vorzeichen von b bestimmt wird.