

Die Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl

Jemand gewinnt 120 €, wir sagen auch er gewinnt einen Geldbetrag von 120 €
 Jemand bekommt einen Strafzettel über 120 €, wir sagen auch er hat einen
 Geldbetrag von 120 € zu zahlen.
 Finanztechnisch bedeutet der Gewinn ein Plus und die Strafe ein Minus.

Also: Gewinn +120 € Strafzettel -120 €

In beiden Fällen handelt es sich um 120 €.

Der Betrag einer reellen Zahl ergibt sich, wenn das Vorzeichen auf + gewandelt wird.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} |4| = 4 \quad |5,12| = 5,12 \quad |\sqrt{3}| = \sqrt{3} \\ |-4| = 4 \quad |-5,12| = 5,12 \quad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3} \end{array}$$

Nicht ganz so einfach ist es, wenn wir den Betrag einer Variablen x bestimmen wollen.

$|x| = x$ gilt leider nicht für alle reellen Zahlen. Zum Beispiel:

$$x = 5 \Rightarrow |x| = x \text{ denn } |5| = 5 \text{ ist wahr}$$

$$x = -5 \Rightarrow |x| = x \text{ denn } |-5| = -5 \text{ ist falsch}$$

Die Vermutung $|x| = x$ ist also nur richtig, wenn $x \geq 0$ ist.

Für $x < 0$ ist sie falsch.

Wir müssen bei der Betragsbestimmung von Variablen also zwei Fälle unterscheiden:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Beispiel: } x = 5 \quad \text{da } x > 0 \text{ ist gilt } |x| = x \text{ denn } |5| = 5$$

$$x = -5 \quad \text{da } x < 0 \text{ ist gilt } |x| = -x \text{ denn } |-5| = -(-5) = 5$$

Der Betrag einer reellen Zahl ist immer positiv.

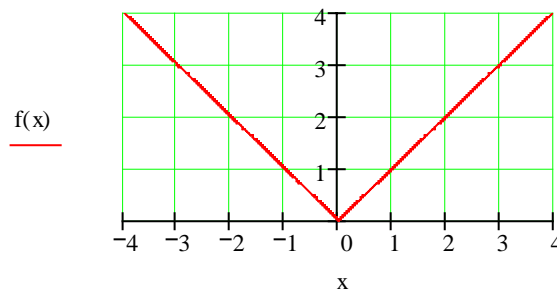
Der Betrag gibt die Größe einer Zahl an, ohne dabei auf das Vorzeichen zu achten.

Betragsfunktion

Wie sieht der Graph der Betragsfunktion $y = f(x) = |x|$ aus?

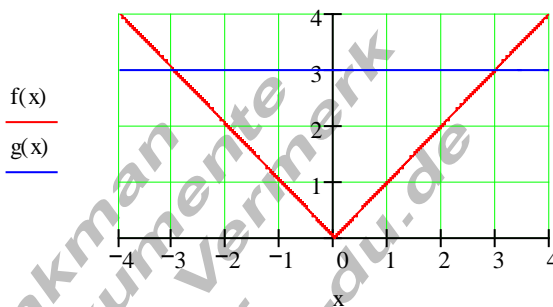
Dazu legen wir eine Wertetabelle an.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y = x	4	3	2	1	0	1	2	3	4



Aufgabe: Berechnen Sie alle x für die gilt: $y = f(x) = |x| = 3$
 Es gibt für x offenbar zwei Lösungen:

$x_1 = 3$, denn $|3| = 3$ und
 $x_2 = -3$, denn $|-3| = 3$



Die Lösung einer Betragsgleichung findet man durch Fallunterscheidung:

Fall I: die Betragszeichen einfach weglässt $|x_1| = 3 \Rightarrow \underline{x_1 = 3}$

Fall II: vorher mit (-1) multipliziert $|-x_2| = 3 \Rightarrow -x_2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -3}}$

Beispiel 1

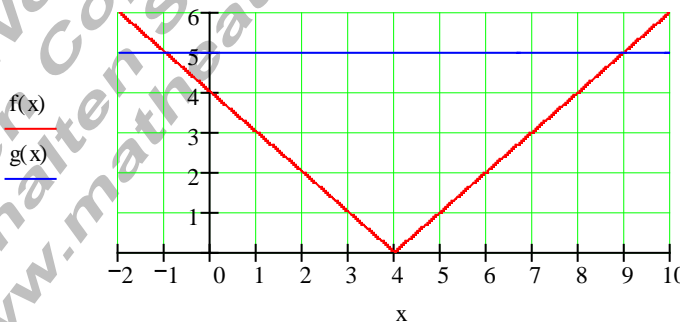
$$y = f(x) = |x - 4| = 5$$

Fall I: $x - 4 = 5$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 9}}$

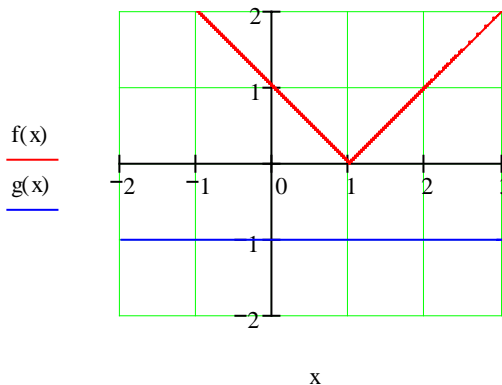
Fall II: $-(x - 4) = 5$

$\Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -1}}$



Beispiel 2

$y = f(x) = |x - 1| = -1$ hier gibt es keine Lösung, da der Betrag einer reellen Zahl immer positiv ist



Beispiel 3

$$y = f(x) = |2 + x| = 0$$

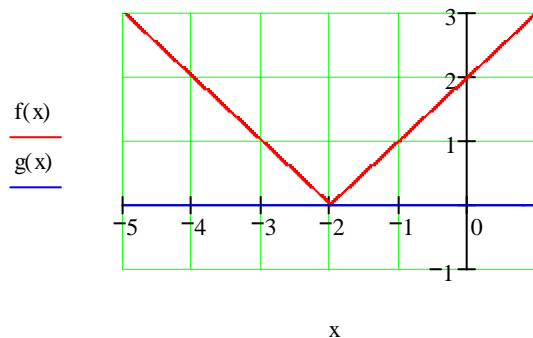
$$\text{Fall I: } 2 + x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -2}}$$

$$\text{Fall II: } -(2 + x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$$

hier gibt es nur eine Lösung

$$\underline{\underline{x_1 = x_2 = -2}}$$



Eine Betragsgleichung hat entweder keine, eine oder zwei Lösungen.
Verschiebungen der Betragsfunktion $y = f(x) = |x|$

Verschiebung in y – Richtung.
 Untersuchen Sie für verschiedene

Werte von b die Funktion

$$y = f(x) = |x| + b$$

und zeichnen Sie die Graphen

in ein Koordinatensystem.

$$y = f(x) = |x|$$

$$y = g(x) = |x| + 2$$

$$y = h(x) = |x| - 2$$

Die Verschiebung erfolgt längs der
 Ordinatenachse, wobei die Richtung der
 Verschiebung durch das Vorzeichen von
 b bestimmt wird.

