SF11S | HF11S Mathe KA - Nr. 4 26.5.03 (1)

Zu 1 $K(0) = 4500\,€$ $n = 7$ $p = 5,5\,\%$ $q = 1,055$

$$K(n) = K(0) \cdot q^n = 4500\,€ \cdot (1,055)^7 = \underline{\underline{6546,06\,€}}$$

Nach 7 Jahren steht ein Kapital von 6546,06 € zur Verfügung. (5)

Zu 2 $n = 5$ Jahre $K(n) = 6000\,€$ $p = 3,8\,\%$

$q = 1,038$

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \Leftrightarrow K(0) = \frac{K(n)}{q^n}$$

$$K(0) = \frac{6000\,€}{(1,038)^5} = \underline{\underline{4979,26\,€}}$$

Heute muss ein Betrag von 4979,26 € zu 3,8% für 5 Jahre angelegt werden. (5)

Zu 3 $K(0) = 3500\,€$ $n = 7$ Jahre $K(n) = 5000\,€$

$$K(n) = K(0)\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{K(n)}{K(0)}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1$$

$$\Rightarrow p = 100 \cdot \left[\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1\right] = 100 \cdot \left[\left(\frac{K(n)}{K(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

$$p = 100 \cdot \left[\left(\frac{5000}{3500}\right)^{\frac{1}{7}} - 1\right] \approx \underline{\underline{5,227\,\%}}$$

Das Kapital muss zu einem Zinssatz von $p = \underline{\underline{5,227\,\%}}$ angelegt werden. (5)

Zu 4 a.) $R(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

2

$R(0|0)$ $R(0) = \boxed{a_0 = 0}$

$R(1|1{,}5)$ $R(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 1{,}5$

$R(2|3)$ $R(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 3$

$R(3|0)$ $R(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 0$

a_3	a_2	a_1		
1	1	1	1,5	
8	4	2	3	II − 8·I
27	9	3	0	III − 27·I
1	1	1	1,5	
0	−4	−6	−9	|·(−1)
0	−18	−24	−40,5	|·2
1	1	1	1,5	
0	4	6	9	
0	−36	−48	−81	III + 9·II
1	1	1	1,5	
0	4	6	9	
0	0	6	0	

$1{,}5 \cdot 8 = 12$

$\boxed{a_1 = 0}$

$4a_2 = 9 \Leftrightarrow a_2 = \frac{9}{4}$

$a_3 + a_2 = \frac{3}{2}$

6

$a_3 + \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{6}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$

$\boxed{a_3 = -\frac{3}{4}}$

$$\boxed{R(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2}$$

b.) rel. Maximum: $R'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$

$R''(x) = -\frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$

4

$R'''(x) = -\frac{9}{2}$

$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-\frac{9}{4}x + \frac{9}{2} = 0$

$f''(2) = -9 + 9/2 < 0$

$\Rightarrow$ rel. Max

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}x = -\frac{9}{2}$

Für die Menge $x = 2$ ME ist die Reaktion am stärksten

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x = \frac{9}{2} \quad |: \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{9}{2} : \frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 4}{9 \cdot 2} = 2$

3

c.) Wendepunkt $R''(x) = 0$

$\Rightarrow -\frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \quad | -\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}x = -\frac{9}{2} \quad | \cdot (-1)$

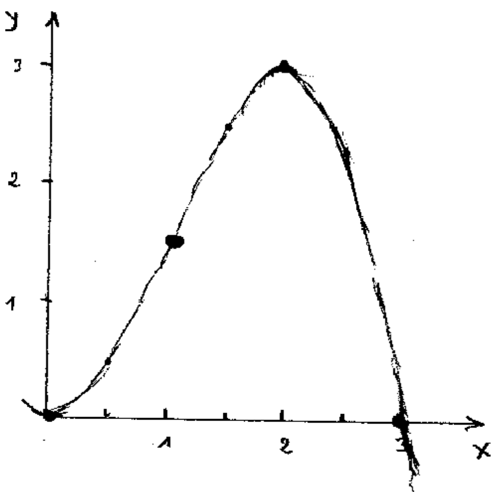
$\Leftrightarrow \frac{9}{2}x = \frac{9}{2} \Rightarrow \underline{x = 1}$

3

Wp (1 | 1,5)

d.) Wertetabelle

	Wp	max					
x	0	1	2	3	0,5	1,5	2,5
y	0	1,5	3	0	0,47	2,53	2,34



3

e.) Im Wendepunkt ist die Steigung maximal.
Das bedeutet für x = 1 ist die Reaktionsgeschwindigkeit $R'(x)$ maximal

Ergebnisbeurteilung:
Bei x = 2 KE ist die Reaktionsstärke R maximal.
Bei größeren x-Werten nimmt sie wieder ab um bei x = 3 den Nullpunkt zu erreichen

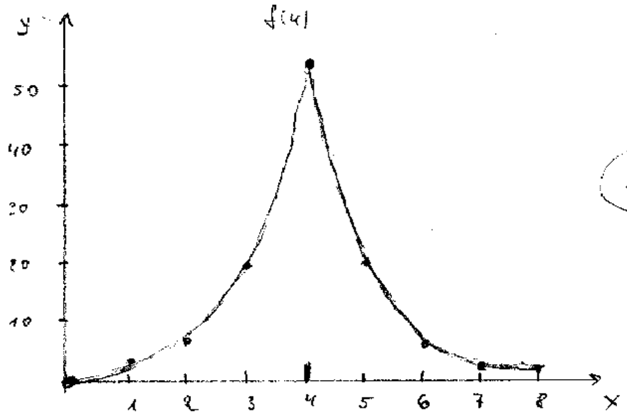
4

Zu 5 a) $f(x) = e^x - 1$ für $0 \le x \le 4$ (4)

$g(x) = f(4)\, e^{-(x-4)}$ für $4 \le x < \infty$

Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1,7	6,4	19,1	53,6	19,7	7,2	2,7	1,0



(5)

b.) $\underbrace{t = 4 \text{ Tage}}$ $\quad W = \underbrace{\int_0^4 f(x)\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_4^\infty g(x)\,dx}_{A_2}$

$$A_1 = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (e^x - 1)\,dx = e^x - x \Big|_0^4 = e^4 - 4 - (e^0 - 0) = \underline{\underline{e^4 - 5}}$$

$$A_2 = \int_4^\infty g(x)\,dx = f(4) \underbrace{\int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx}_{I}$$

$$I = \int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx$$

Substitution: $u(x) = -(x-4) = -x+4$

$u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$

u.G. $\quad u(4) = -4+4 = 0$

o.G. $\quad \lim_{x \to \infty} u(x) = -\infty$

$$\Rightarrow I = -\int_0^{-\infty} e^u\,du = \int_{-\infty}^0 e^u\,du = e^u \Big|_{-\infty}^0 = \underbrace{e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{u \to -\infty} e^u}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

5

$A_2 = f(4) \cdot 1 = f(4) = e^4 - 1$

$A = A_1 + A_2 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = \underline{\underline{2 \cdot e^4 - 6}} \approx \underline{\underline{103{,}196\,WE}}$

Die schädigende Wirkung nach 4 Tagen beträgt

5

$\underline{\underline{103{,}196\ WE}}$

c.) $t = 5$ Tage $W = \underbrace{\int_0^5 f(x)\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_5^\infty g(x)\,dx}_{A_2}$

$A_1 = e^x - x\Big|_0^5 = e^5 - 5 - (e^0 - 0) = \underline{\underline{e^5 - 6}}$

$A_2 = f(5) \cdot 1 = f(5) = \underline{\underline{e^5 - 1}}$

$A = A_1 + A_2 = e^5 - 6 + e^5 - 1 = 2e^5 - 7 \approx \underline{\underline{289{,}8\,WE}}$

Wird das Abtötungsmittel erst nach 5 Tagen gegeben, so bleibt eine schädigende Wirkung, weil der Toleranzwert von Wmax überschritten wird.

5

50 Punkte