Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Do 1.6.06**
SB15Z Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner.

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$
   a) Berechnen Sie die Nullstellen.
   b) Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
   c) Wie ist der Verlauf des Graphen?

Lösung:

10 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = -\frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Nullstellen: } \underline{\underline{x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -\frac{3}{2}}}$$

4 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

4 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$
   a) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
   b) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
   c) Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$f(x)$	$-7,38$		$3,88$		$4,13$		$-0,63$		$-4,38$		$-1,13$	

   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Dabei sei $P_{max}(-1|5)$ ein Hochpunkt und $P_{min}\left(\frac{5}{3}\left|-\frac{121}{27}\right.\right)$ ein Tiefpunkt.

Lösung:

4 Punkte

a)	Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

10 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{0} & \underline{-5} & \\
 & 1 & 0 & -5 & -3 & = f(1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} & \\
 & 1 & 1 & -3 & -4 & = f(2) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{2} & \underline{3} & \\
 & 1 & -2 & -3 & 5 & = f(-1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{6} & \underline{-2} & \\
 & \color{red}{1} & \color{red}{-3} & \color{red}{1} & 0 & = f(-2)
\end{array}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 2\right) : (x+2) = x^2 - 3x + 1 \\
\underline{-\left(x^3 + 2x^2\right)} \\
\quad -3x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(-3x^2 - 6x\right)} \\
\qquad\qquad x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(x+2)}
\end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ mit $p = -3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2,62 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0,38 \end{array} \right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|2) \quad P_{x1}(-2|0)$

$P_{x2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

$P_{x2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

6 Punkte

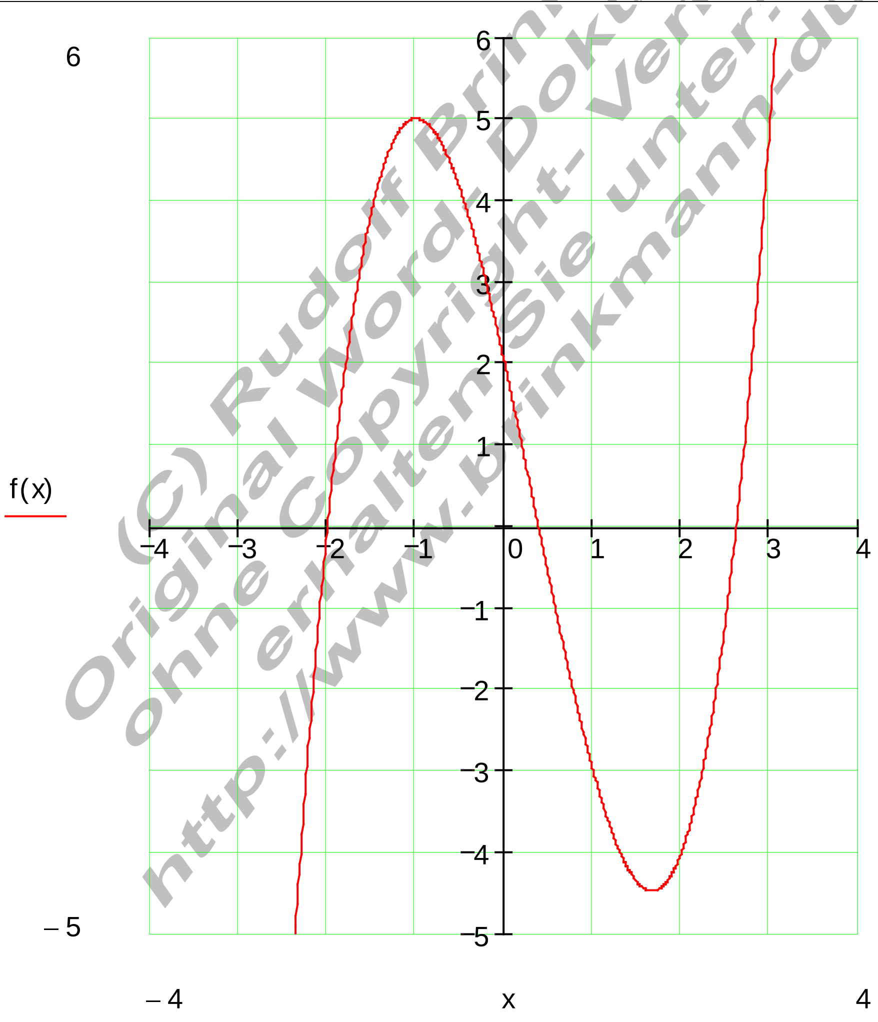
c) Die Wertetabelle:

		P_{x1}		P_{max}		P_y		
x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−7,38	0	3,88	5	4,13	2	−0,63	−3
					P_{min}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1,5	2	2,5	3	$1,\overline{6}$	2,62	0,38	
f(x)	−4,38	−4	−1,13	5	−4.48	0	0	

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ x=3 & \downarrow & \underline{3} & \underline{6} & \underline{3} \\ & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} = f(3)$$

12 Punkte

d)



Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Do 1.6.06**
SB15Z Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$
   a) Berechnen Sie die Nullstellen.
   b) Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
   c) Wie ist der Verlauf des Graphen?

10 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = \frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2 \end{array} \right.$$

$$\text{Nullstellen: } \underline{\underline{x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = -2}}$$

4 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

4 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$
   a) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
   b) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
   c) Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)		1,13		4,38		0,63		–4,13		–3,88		7,38

   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Dabei sei $P_{min}(1|-5)$ ein Tiefpunkt und $P_{max}\left(-\frac{5}{3}|\frac{121}{27}\right)$ ein Hochpunkt.

4 Punkte

a)	Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

10 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

$x^2 + 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrrl} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{2} & \underline{-3} & \\ & 1 & 2 & -3 & -5 & = f(1) \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -2 & \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{6} & \underline{2} & \\ & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{1} & 0 & = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(x^3 + x^2 - 5x - 2\right):(x-2) = x^2 + 3x + 1 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad 3x^2 - 5x \\ \quad \underline{-\left(3x^2 - 6x\right)} \\ \qquad x - 2 \\ \qquad \underline{-(x-2)} \end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 + 3x + 1 = 0$ mit $p = 3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0{,}38 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -2{,}62 \end{array} \right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|-2)$ $P_{x1}(2|0)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}|0\right)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}|0\right)$

6 Punkte

c) Die Wertetabelle:

							P_y	
x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$
$f(x)$	-5	$1,13$	4	$4,38$	3	$0,63$	-2	$-4,13$
	P_{min}		P_{x1}		P_{max}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1	$1,5$	2	$2,5$	$-1,\overline{6}$	$-0,38$	$-2,62$	
$f(x)$	-5	$-3,88$	0	$7,38$	$4,48$	0	0	

$$\begin{array}{lccccl} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-3 & \downarrow & \underline{-3} & \underline{6} & \underline{-3} & \\ & 1 & -2 & 1 & -5 & = f(-3) \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{2} & \underline{6} & \\ & 1 & -1 & -3 & 4 & = f(-2) \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{0} & \underline{5} & \\ & 1 & 0 & -5 & 3 & = f(-1) \end{array}$$

12 Punkte

d)