SB13Z Klassenarbeit Mathematik vom 08.3.05 Lösungen

zu 1 a)

Das Gleichungssystem:

$P_1(-2\,|\,-6): f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -6$

$P_2(-1\,|\,2): \; f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 2$

$P_3(2\,|\,-4): \; f(2) \; = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_4(3\,|\,-6): \; f(3) \; = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -6$

Lösung mit dem Gauss – Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3	
1	–2	4	–8	–6
1	–1	4	–1	2 II – I
1	2	4	8	–4 III – I
1	3	9	27	–6 IV – I
1	–2	4	–8	–6
0	1	–3	7	8
0	4	0	16	2 |: 4
0	5	5	35	0 |: 5
1	–2	4	–8	–6
0	1	–3	7	8
0	1	0	4	0,5 III – II
0	1	1	7	0 IV – II
1	–2	4	–8	–6
0	1	–3	7	8
0	0	3	–3	–7,5
0	0	4	0	–8

Bestimmen der Koeffizienten:

$4a_2 = -8\,|:4 \Leftrightarrow a_2 = \frac{-8}{4} = \underline{\underline{-2}}$

$3a_2 - 3a_3 = -7{,}5 \Leftrightarrow 3\cdot(-2) - 3a_3 = -7{,}5 \Leftrightarrow -6 - 3a_3 = -7{,}5\,|+6$

$\Leftrightarrow -3a_3 = -7{,}5 + 6 = -1{,}5\,|:(-3) \Leftrightarrow a_3 = \frac{-1{,}5}{-3} = 0{,}5 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 8 \Leftrightarrow a_1 - 3\cdot(-2) + 7\cdot\frac{1}{2} = 8 \Leftrightarrow a_1 + 6 + 3{,}5 = 8$

$\Leftrightarrow a_1 + 9{,}5 = 8\,|-9{,}5 \Leftrightarrow a_1 = 8 - 9{,}5 = -1{,}5 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

$a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = -6 \Leftrightarrow a_0 - 2\cdot(-1{,}5) + 4\cdot(-2) - 8\cdot 0{,}5 = -6$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 - 8 - 4 = -6 \Leftrightarrow a_0 - 9 = -6\,|+9$

$\Leftrightarrow a_0 = -6 + 9 = \underline{\underline{3}}$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3}}$

zu 1b)

Berechnung der lokalen Extremwerte:

Die Funktion mit ihren Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2}; \quad f''(x) = 3x - 4; \quad f'''(x) = 3$

Notwendige Bedingung für Extremwerte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0$

Das ist eine quadratische Gleichung. Um sie mit der p – q – Formel zu lösen, muss sie erst auf die Normalform gebracht werden.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-4x-\frac{3}{2}=0$$

$$\frac{3}{2}x^2-4x-\frac{3}{2}=0\,|\cdot 2 \Leftrightarrow 3x^2-8x-3=0\,|:3 \Leftrightarrow \underline{x^2-\frac{8}{3}x-1=0 \text{ (Normalform)}}$$

$$\Rightarrow p=-\frac{8}{3}\text{; bzw. } \frac{p}{2}=-\frac{4}{3};\ \ q=-1$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1=\frac{16}{9}+1=\frac{16}{9}+\frac{9}{9}=\frac{25}{9}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1&=\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3\\ x_2&=\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Extremwerten ist:
$f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung werden in die 2. Ableitung eingesetzt:

$$x_1=3 \Rightarrow \quad f''(3)=3\cdot 3-4=9-4=5>0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rel min}}}$$

$$x_2=-\frac{1}{3} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-4=-1-4=-5<0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rel max}}}$$

Um nun die zugehörigen y – Koordinaten zu erhalten, werden die Lösungen der quadratischen Gleichung in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_1=3 :\Rightarrow f(3)&=\frac{1}{2}\cdot 3^3-2\cdot 3^2-\frac{3}{2}\cdot 3+3\\ &=\frac{27}{2}-18-\frac{9}{2}+3=\frac{27}{2}-\frac{36}{2}-\frac{9}{2}+\frac{6}{2}=-\frac{12}{2}=-6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{min}(3\,|-6)}}$$

$$\begin{aligned} x_2=-\frac{1}{3} :\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)&=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3\\ &=-\frac{1}{54}-\frac{2}{9}+\frac{3}{6}+3=-\frac{1}{54}-\frac{12}{54}+\frac{27}{54}+\frac{162}{54}=\frac{176}{54}=\frac{88}{27}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{max}\left(-\frac{1}{3}\,|\,\frac{88}{27}\right)}}\approx(-0{,}3\,|\,3{,}26)$$

zu c)
<u>Berechnung des Wendepunktes:</u>

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Wendepunkten ist:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$ (2. Bedingung ist mit $f'''(x)=3$ erfüllt)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-4=0$$

$$3x-4=0\,|+4 \Leftrightarrow 3x=4\,|:3 \Leftrightarrow x_w=\frac{4}{3}$$

Um nun die zugehörige y – Koordinate zu erhalten, wird die Lösungen der Gleichung in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$x_w = \frac{4}{3} :\Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right) + 3$$

$$= \frac{64}{54} - \frac{32}{9} - \frac{12}{6} + 3 = \frac{64}{54} - \frac{192}{54} - \frac{108}{54} + \frac{162}{54} = -\frac{74}{54} = -\frac{37}{27}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{4}{3}\,|\,-\frac{37}{27}\right)}} \approx (1{,}33\,|\,-1{,}37)$$

zu 1 d)

Berechnung der Achsenschnittpunkte:

Der Schnittpunkt mit der y – Achse kann direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden: $f(0) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,3)}}$

Die Schnittpunkte mit der x – Achse sind die Nullstellen von f(x).
Wenn wir die erste Nullstelle raten können, dann lässt sich die zu lösende Polynomgleichung durch Polynomdivision um einen Grad verringern.

$$x = 1 :\Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - \frac{3}{2}\cdot 1 + 3 = \frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} - \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(1\,|\,0)}}$$

Polynomdivision:

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right) : (x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)} \\ \quad -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \\ \quad \underline{-\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)} \\ \qquad -3x + 3 \\ \qquad \underline{-(-3x + 3)} \end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 = 0 \,|\cdot 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$p = -3 \,;\, q = -6 \Rightarrow D = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 = \frac{9}{4} + \frac{24}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1{,}5 + \sqrt{8{,}25} \approx 4{,}37 \\ x_2 = 1{,}5 - \sqrt{8{,}25} \approx -1{,}37 \end{array}$$

Nullstellen: $\underline{\underline{P_{x1}(1\,|\,0)\,;\; P_{x2}(4{,}37\,|\,0)\,;\; P_{x3}(-1{,}37\,|\,0)}}$

zu 1 e)

<u>HORNER – Schema:</u>

$$\begin{array}{l|cccc}
 & 0{,}5 & -2 & -1{,}5 & 3 \\
x = 4 & & \underline{+2} & \underline{+0} & \underline{-6} \\
 & 0{,}5 & 0 & -1{,}5 & -3 \\
\hline
 & 0{,}5 & -2 & -1{,}5 & 3 \\
x = 5 & & \underline{+2{,}5} & \underline{+2{,}5} & \underline{+5} \\
 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}0 & 8
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
f(4) = -3 \\
f(5) = 8
\end{array}$$

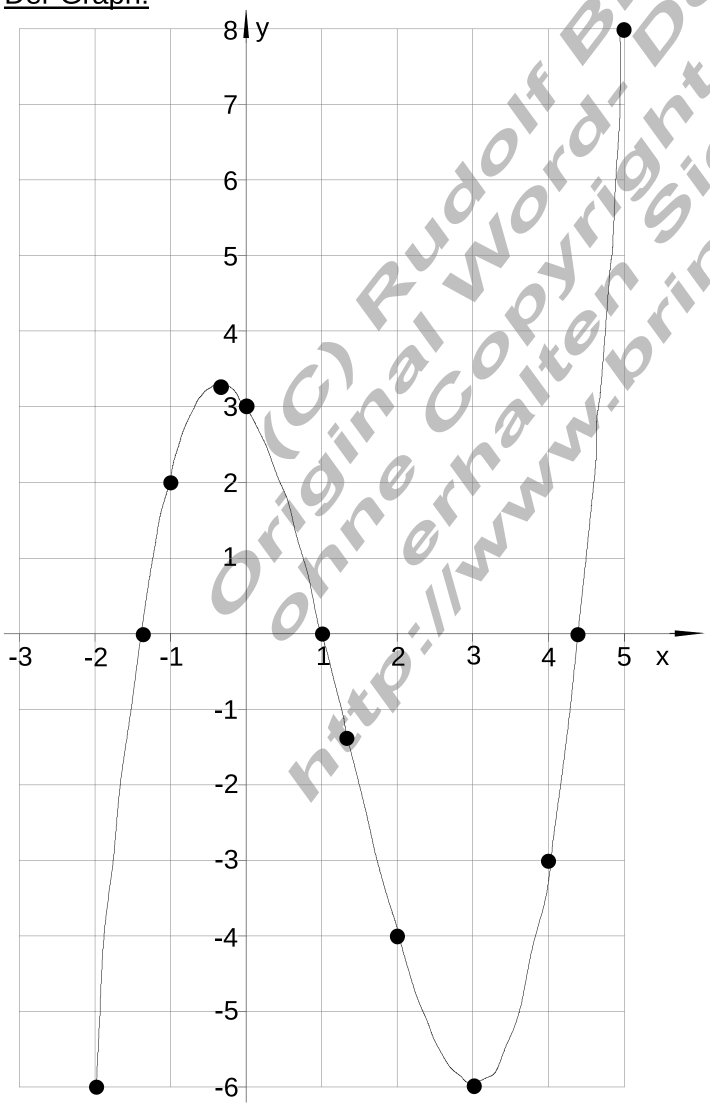
zu 1 f)

<u>Die Wertetabelle:</u>

	P_1	P_{x3}	P_2	P_{max}	P_y	P_{x1}	P_w	P_3	P_{min}		
x	–2	–1,37	–1	–0,33	0	1	1,33	2	3	4	5
f(x)	–6	0	2	3,26	3	0	–1,37	–4	–6	–3	8

zu 1 g)

<u>Der Graph:</u>



zu 2

a) $\int\left(x^3-2x^2+x-1\right)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

b) $\int\left(\frac{1}{2}x^2-3x+1\right)dx=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$

c) $\int\left(4x^3-3x^2+2x\right)dx=x^4-x^3+x^2+C$

zu 3

Die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen der quadratischen Funktion f(x):

$$f(x)=0\Leftrightarrow-\frac{16}{25}x^2+4=0$$

$$-\frac{16}{25}x^2+4=0\,|-4\Leftrightarrow-\frac{16}{25}x^2=-4\,|\cdot(-1)\Leftrightarrow\frac{16}{25}x^2=4\,|\cdot\frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}\,|\sqrt{}\Leftrightarrow|x|=\frac{5}{2}\Rightarrow x_1=2{,}5\,;\,x_2=-2{,}5$$

$$A=\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{16}{25}x^3+4\right)dx=-\frac{16}{75}x^3+4x\Big|_{-2,5}^{2,5}$$

$$=-\frac{16}{75}\cdot2{,}5^3+4\cdot2{,}5-\left(-\frac{16}{75}\cdot(-2{,}5)^3+4\cdot(-2{,}5)\right)=13{,}\overline{3}=\underline{\underline{13\frac{1}{3}}}$$

Für das Tor wird 13,33 m^2 Holz benötigt.