Lösungen zum Hypothesentest II

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösungen

<u>Aufgabenanalyse und aufstellen der Hypothesen.</u>
Aus Sicht jeder Firma ist ein Hypothesentest aufzustellen. Aufgrund der unterschiedlichen Interessen unterscheiden sich die aufzustellenden Hypothesen. Damit unterscheiden sich auch jeweils der Annahme- und Ablehnungsbereich.

„**Schlemmerland** möchte zeigen, dass $p > 0,05$ gilt
und stellt folgende Hypothesen auf:
Nullhypothese H_0: $p \le 0,05$; Alternativhypothese H_1: $p > 0,05$.
Das ist ein rechtsseitiger Hypothesentest.

„**Billigfood** möchte zeigen, dass $p < 0,05$ gilt
und stellt folgende Hypothesen auf:
Nullhypothese H_0: $p \ge 0,05$; Alternativhypothese H_1: $p < 0,05$.
Das ist ein linksseitiger Hypothesentest.

A1 Test für **„Schlemmerland“.**

Nullhypothese $H_0 : p \le 0,05$ Signifikanzniveau $\alpha \le 5\%$

Daten: $n = 300\,;\ p = 0,05\,;\ \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,05 = 15$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0,95} = \sqrt{14,25} \approx 3,775 > 3$$

Bei einem Signifikanzniveau von 5% sind folgende Intervalle zu betrachten:

$$\{\quad 5\% \quad\}\{\quad 90\% \quad\}\underbrace{\{\quad 5\% \quad\}}_{\text{Ablehnungsbereich für } H_0}$$

Damit wird $\mu + 1,64 \cdot \sigma = 15 + 1,64 \cdot \sqrt{14,25} \approx 21,19$ gerundet auf 21
die obere Grenze des Annahmebereichs für H_0

Es gilt:	Annahmebereich von H_0	$A = \{0 \ldots 21\}$
	Ablehnungsbereich von H_0	$\overline{A} = \{22 \ldots 300\}$

Zu prüfen ist der Ablehnungsbereich derart, das gilt:

$$P(22 \le X \le 300) \le \alpha = 5\%$$

$$\{0 \ldots 8\}\{9 \ldots 15 \ldots 21\}\{22 \ldots 300\}$$

$$P(22 \le X \le 300) = \frac{1}{2}\left[1 - P(9 \le X \le 21)\right]$$

$$P(9 \le X \le 21) \Rightarrow r = 6,5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{6,5}{\sqrt{14,25}} \approx 1,72 \Rightarrow P(9 \le X \le 21) \approx 0,915$$

$$\Rightarrow P(22 \le X \le 300) \approx \frac{1}{2}\left[1 - 0,915\right] = 0,043$$

A1

Test für **„Billigfood“.**

Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}05$ Signifikanzniveau $\alpha \leq 5\%$

Daten: $n = 300\,;\, p = 0{,}05\,;\, \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}05 = 15$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0{,}95} = \sqrt{14{,}25} \approx 3{,}775 > 3$$

Bei einem Signifikanzniveau von 5% sind folgende Intervalle zu betrachten:

$$\underbrace{\{\quad 5\% \quad\}}_{\text{Ablehnungsbereich für } H_0}\{\quad 90\% \quad\}\{\quad 5\% \quad\}$$

Damit wird $\mu - 1{,}64 \cdot \sigma = 15 - 1{,}64 \cdot \sqrt{14{,}25} \approx 8{,}81$ gerundet auf 9

die untere Grenze des Annahmebereichs für H_0

Es gilt:	Annahmebereich von H_0	$A = \{9 \ldots 300\}$
	Ablehnungsbereich von H_0	$\overline{A} = \{0 \ldots 8\}$

Zu prüfen ist der Ablehnungsbereich derart, das gilt:

$P(0 \leq X \leq 8) \leq \alpha = 5\%$

$\{0 \ldots 8\}\{9 \ldots 15 \ldots 21\}\{22 \ldots 300\}$

$$P(0 \leq X \leq 8) = \frac{1}{2}\left[1 - P(9 \leq X \leq 21)\right]$$

$$P(9 \leq X \leq 21) \Rightarrow r = 6{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{6{,}5}{\sqrt{14{,}25}} \approx 1{,}72 \Rightarrow P(9 \leq X \leq 21) \approx 0{,}915$$

$$\Rightarrow P(0 \leq X \leq 8) \approx \frac{1}{2}\left[1 - 0{,}915\right] = 0{,}043$$

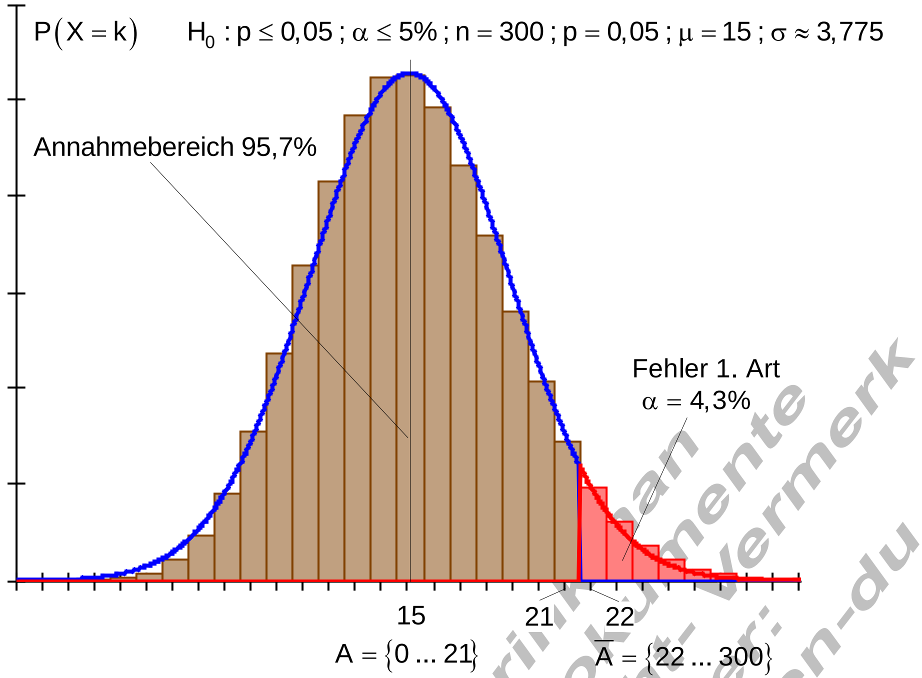
A1

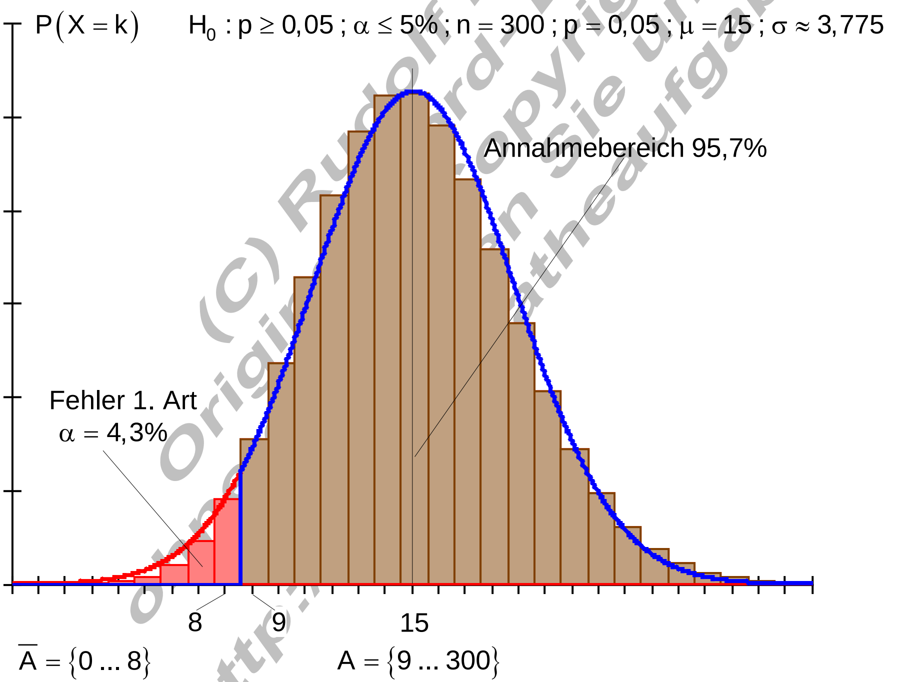
Auswertung:

Eine Gegenüberstellung zeigt:

„Schlemmerland“	„Billigfood“
Hypothesen $H_0: p \leq 0{,}05\,;\, H_1: p > 0{,}05$ $A = \{0 \ldots 21\}$ $\overline{A} = \{22 \ldots 300\}$ Rechtsseitiger Test Fehler 1. Art: 4,3% Falls bei der Kontrolle mehr als 21 Packungen Untergewicht haben, wird H_0 abgelehnt. „Schlemmerland“ geht dann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,3% davon aus mehr als 5% aller Packungen seien untergewichtig. Der Betrugsverdacht würde sich erhärten. Falls das Kontrollergebnis in den Annahmebereich von H_0 fällt, muss H_0 zwar angenommen werden, ist aber damit nicht bewiesen.	Hypothesen $H_0: p \geq 0{,}05\,;\, H_1: p < 0{,}05$ $A = \{9 \ldots 300\}$ $\overline{A} = \{0 \ldots 8\}$ Linksseitiger Test Fehler 1. Art: 4,3% Falls bei der Kontrolle weniger als 9 Packungen Untergewicht haben, wird H_0 abgelehnt. „Billigfood“ geht dann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,3% davon aus, weniger als 5% untergewichtige Packungen zu haben. Falls das Kontrollergebnis in den Annahmebereich von H_0 fällt, muss H_0 zwar angenommen werden, ist aber damit nicht bewiesen.

A1 Vergleich eines rechtsseitigen mit einem linksseitigen Hypothesentest





Bemerkung zur errechneten Irrtumswahrscheinlichkeit.
Die Berechnung der Intervallwahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Ablehnungsbereiche erfolgte mit den Tabellenwerten der Normalverteilung.
Die Werte der Normalverteilung sind symmetrisch zum Erwartungswert.
Gleiche Umgebungsradien bedeuten gleiche Flächen bzw. %- Werte.
Die in der Grafik dargestellten Säulen repräsentieren die Binomialverteilung.
Diese ist nur bei p = 0,5 symmetrisch zum Erwartungswert.
Eine genaue Rechnung mit den Werten der Binomialverteilung würde beim rechtsseitigen Test einen Fehler von 4,9% und beim linksseitigen Test von 3,4% zeigen.
Dieser Unterschied liegt an der extremen Schiefheit der Binomialverteilung bei p = 0,05.

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	<u>Aufgabenanalyse und aufstellen der Hypothesen.</u> Hatte das Engagement der Lehrkräfte Erfolg? Falls ja, dann sollten weniger als 15% aller Schüler Defizite aufweisen. Die Untersuchung soll zeigen, dass $p < 0{,}15$ gilt. Damit werden folgende Hypothesen aufgestellt: Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}15$; Alternativhypothese H_1: $p < 0{,}15$. Die Nullhypothese ist nur dann abzulehnen, wenn bei wenigen Schülern Defizite auftreten. Man sagt auch kleine Werte von X sprechen gegen H_0. Das ist ein linksseitiger Hypothesentest.

A2 a)

Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}15$ Signifikanzniveau $\alpha \leq 5\%$

Daten: $n = 140;\ p = 0{,}15;\ \mu = n \cdot p = 140 \cdot 0{,}15 = 21$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{21 \cdot 0{,}85} = \sqrt{17{,}85} \approx 4{,}225 > 3$$

Bei einem Signifikanzniveau von 5% sind folgende Intervalle zu betrachten:

$$\underbrace{\{\quad 5\% \quad\}}_{\text{Ablehnungsbereich für } H_0}\ \{\quad 90\% \quad\}\{\quad 5\% \quad\}$$

Damit wird $\mu - 1{,}64 \cdot \sigma = 21 - 1{,}64 \cdot \sqrt{17{,}85} \approx 14{,}07$ gerundet auf 14

die untere Grenze des Annahmebereichs für H_0

Es gilt:	Annahmebereich von H_0	$A = \{14 \ldots 140\}$
	Ablehnungsbereich von H_0	$\overline{A} = \{0 \ldots 13\}$

Zu prüfen ist der Ablehnungsbereich derart, das gilt:

$$P(0 \leq X \leq 13) \leq \alpha = 5\%$$

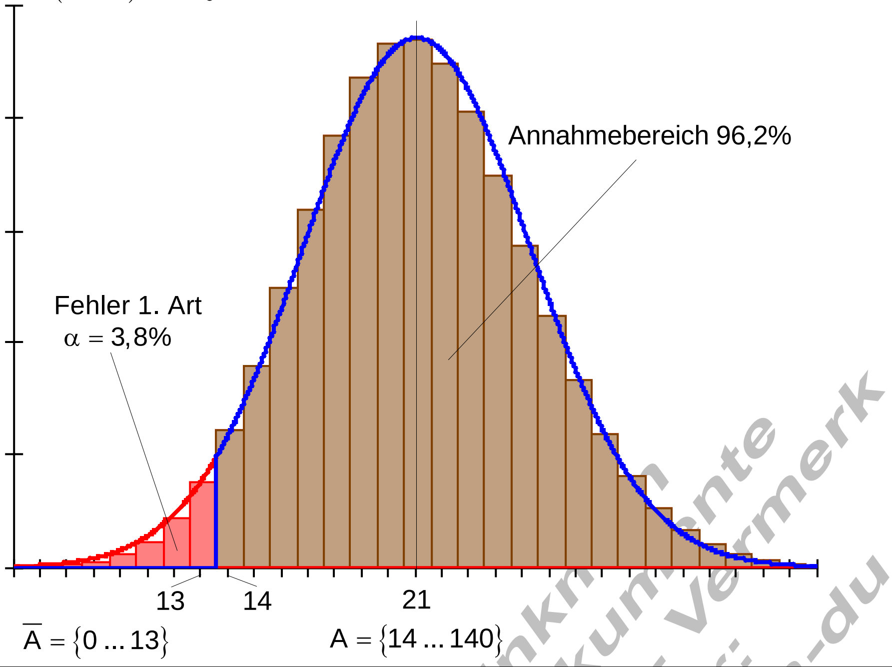
$$\{0 \ldots 13\}\{14 \ldots 21 \ldots 28\}\{29 \ldots 140\}$$

$$P(0 \leq X \leq 13) = \frac{1}{2}\left[1 - P(14 \leq X \leq 28)\right]$$

$$P(14 \leq X \leq 28) \Rightarrow r = 7{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{7{,}5}{\sqrt{17{,}85}} \approx 1{,}78 \Rightarrow P(14 \leq X \leq 28) \approx 0{,}925$$

$$\Rightarrow P(0 \leq X \leq 13) \approx \frac{1}{2}\left[1 - 0{,}925\right] = 0{,}038$$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	<u>Auswertung:</u> Der Annahmebereich von H_0 beinhaltet 14 bis 140 Schüler mit Defiziten. Der Ablehnungsbereich von H_0 beinhaltet 0 bis 13 Schüler mit Defiziten. Da aber 18 Schüler erneut Defizite aufweisen, fällt das in den Annahmebereich von H_0. Die Nullhypothese muss beibehalten werden, obwohl weniger Schüler, als zu erwarten wäre, Defizite haben. Man kann von keiner positiven Änderung ausgehen. Erst wenn weniger als 14 Schüler Defizite aufweisen, kann man davon ausgehen, dass das Engagement der Lehrer erfolg hatte. Dabei wäre die Irrtumswahrscheinlichkeit etwa 3,8%.

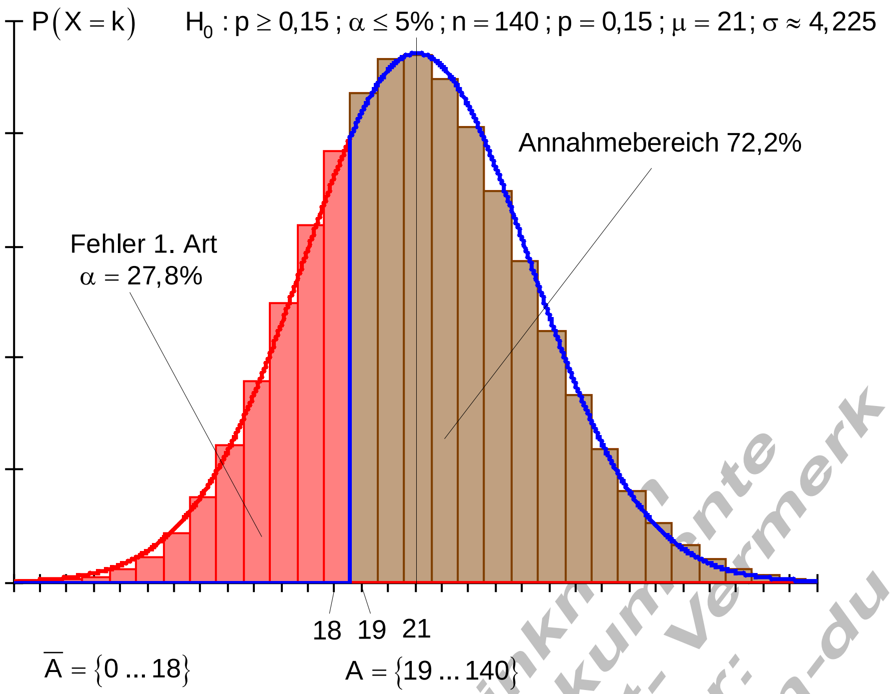
A2	a)	

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	<u>Aufgabenanalyse und aufstellen der Hypothesen.</u> Aufgrund der Tatsache dass 18 Schüler, also weniger als 21, wie bei p = 0,15 zu erwarten wären, Defizite aufweisen, soll die Nullhypothese abgelehnt werden. Dadurch, dass man nun 19 als untere Grenze des Annahmebereichs wählt, ändert sich der Fehler 1. Art. Annahme- und Ablehnungsbereich ändern sich wie folgt. Annahmebereich: { 19 ... 140 } Ablehnungsbereich: { 0 ... 18 } Die Irrtumswahrscheinlichkeit wird durch den Ablehnungsbereich bestimmt. { 0 ... 18 } {19 ... 21 ...23 } { 24 ... 140 }

A2	b)	{ 0 ... 18 } {19 ... 21 ...23 } { 24 ... 140 } $P(0 \leq X \leq 18) = \frac{1}{2}\left[1 - P(19 \leq X \leq 23)\right]$ $P(19 \leq X \leq 23) \Rightarrow r = 2{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{2{,}5}{\sqrt{17{,}85}} \approx 0{,}59 \Rightarrow P(19 \leq X \leq 23) \approx 0{,}445$ $P(0 \leq X \leq 18) = \frac{1}{2}\left[1 - 0{,}445\right] = 0{,}278 = \alpha$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	<u>Auswertung:</u> Der Annahmebereich von H_0 beinhaltet 19 bis 140 Schüler mit Defiziten. Der Ablehnungsbereich von H_0 beinhaltet 0 bis 18 Schüler mit Defiziten. Wird die Nullhypothese schon bei 18 Schülern mit Defiziten abgelehnt, so ist für diese Entscheidung die Irrtumswahrscheinlichkeit etwa 27,8%. Die Aussage, dass das Engagement der Lehrer erfolg hatte, ist also mit einem Fehler von 27,8% behaftet.

A2 b)

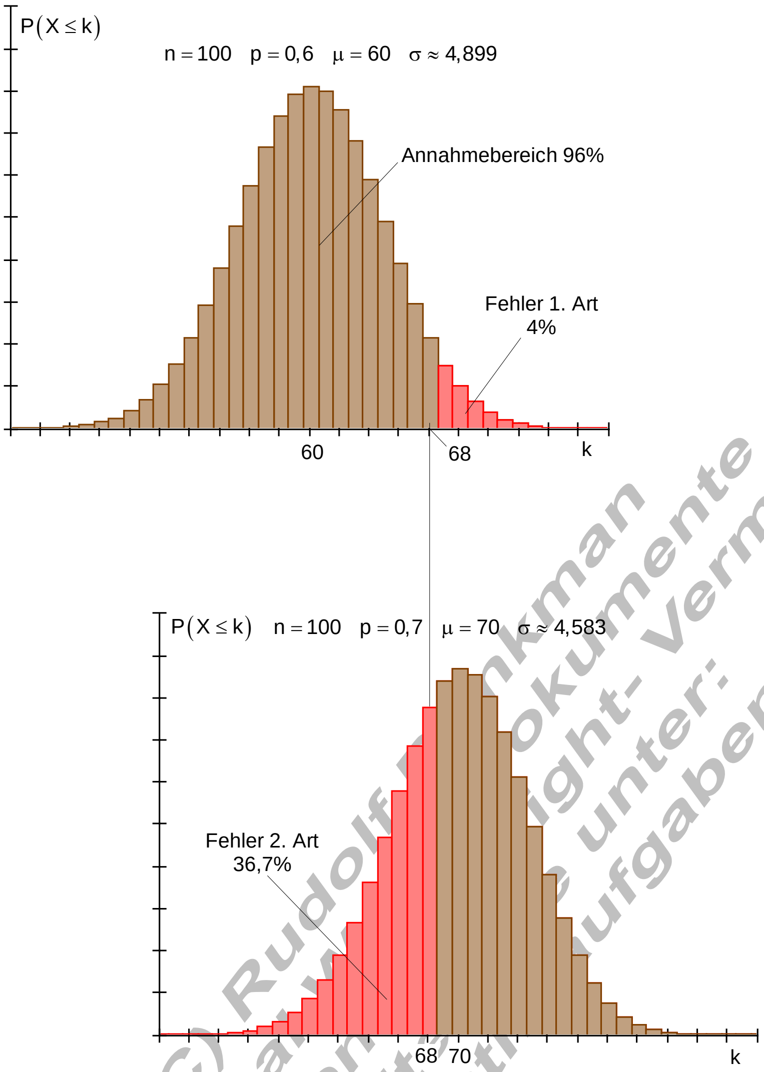


A3	Ausführliche Lösung
a)	<u>Aufgabenanalyse und aufstellen der Hypothesen.</u> Benutzen Sie für die Rechnung die beigefügten Tabellen der Binomialverteilung für n = 100 und p = 0,6, sowie für n = 100 und p = 0,7. Aufstellen der Hypothesen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Placebos wirken, sei höchstens 60%. Vermutet wird, dass Placebos mit einem bitterem Beigeschmack wirksamer sind. Die Untersuchung soll zeigen, dass p > 0,6 gilt. Damit werden folgende Hypothesen aufgestellt: Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}6$; Alternativhypothese H_1: $p > 0{,}6$. Die Nullhypothese ist nur dann abzulehnen, wenn bei vielen Patienten die Placebos wirken. Man sagt auch große Werte von X sprechen gegen H_0. Das ist ein rechtsseitiger Hypothesentest. Der Ablehnungsbereich liegt rechts vom Erwartungswert für p = 0,6 und hat eine Größe von höchstens 4%.

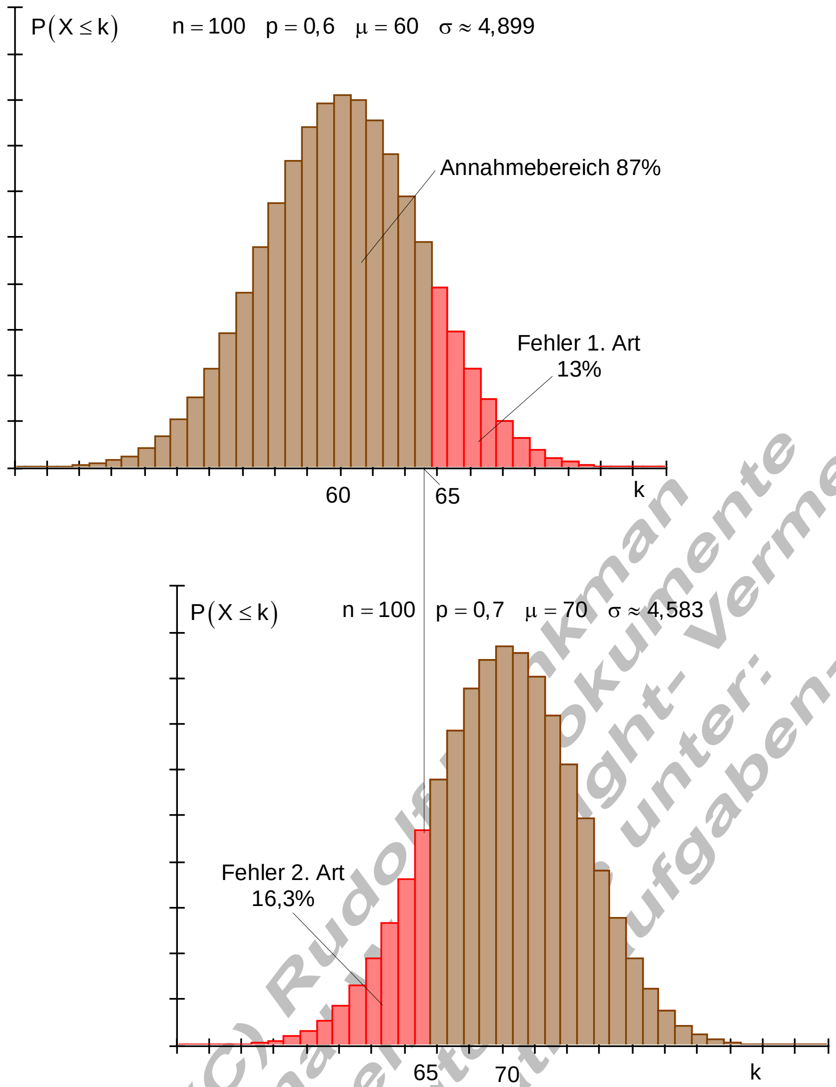
A3	Ausführliche Lösung	
	a)	Nullhypothese : $H_0 : p \le 0,6$ Signifikanzniveau : $\alpha \le 4\%$ $n = 100 \quad \mu = n \cdot p_0 = 100 \cdot 0,6 = 60$ Es ist $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0,4} = \sqrt{24} \approx 4,899 > 3$ $1 - P(X \le k) \le 0,04 = \alpha$ Aus der Tabelle für $n = 100$ und $p = 0,6$ wird für k der Wert 68 abgelesen. $1 - P(X \le 68) = 1 - 0,96 = 0,04 = \alpha$ Damit ist der Annahmebereich für $p \le 0,6$ $A = \{\, 0...60...68 \,\}$ und der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{\, 69...100 \,\}$ Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, da X = 75 im Ablehnungsbereich von H_0 liegt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Entscheidung (Fehler 1. Art) liegt bei etwa 4%.

A3	b)	Falls p = 0,7 tatsächlich richtig ist, kann es dennoch vorkommen, dass das Versuchsergebnis in den Annahmebereich von H_0 fällt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der das geschieht, ist der Fehler 2. Art. $P_{0,7}(A) = P_{0,7}(X \le 68) = 0,367$ (Tabellenwert) Falls für bittere Pillen p = 0,7 gilt, ist der Fehler 2. Art 36,7%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das die Richtigkeit von p = 0,7 nicht erkannt wird, beträgt etwa 36,7%. Soll der Fehler 2. Art verringert werden, dann ist der Annahmebereich von H_0 zu verringern. Das hat aber zur Folge, dass dadurch der Fehler 1. Art sich vergrößert.

A3	c)	$P_{0,7}(X \le k) \le 0,1835 \Rightarrow k \le 65$ denn $P_{0,7}(X \le 65) = 0,163 \mathrel{\hat{=}} 16,3\%$ Dadurch ändert sich der Annahme- und Ablehnungsbereich von H_0 : $A = \{\, 0...60...65 \,\} \quad \overline{A} = \{\, 66...100 \,\}$ Fehler 1. Art: $P_{0,6}(\overline{A}) = 1 - P_{0,6}(X \le 65) = 1 - 0,870 = 0,13 \mathrel{\hat{=}} 13\%$ Dadurch, dass der Fehler 2. Art etwa halbiert wird, vergrößert sich der Fehler 1. Art auf etwa das Dreifache.

<table>
<tr><td rowspan="2">A3</td><td rowspan="2">d)</td><td>

Verteilungen aus Aufgabenteil b)</td></tr>
<tr><td>Ein kleiner Fehler 1. Art führt zu einem großen Fehler 2. Art.
Soll der Fehler 2. Art verringert werden, kann das nur durch eine Vergrößerung des Fehlers 1. Art erreicht werden.</td></tr>
</table>

A3	d)	 Verteilungen aus Aufgabenteil c)
		Dadurch, dass der Fehler 2. Art auf etwa die Hälfte reduziert wurde, hat sich der Fehler 1. Art mehr als verdreifacht.

A3

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,6$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
42	0,000	48	0,010	54	0,131	60	0,538	66	0,909	72	0,995
43	0,000	49	0,017	55	0,179	61	0,618	67	0,938	73	0,998
44	0,001	50	0,027	56	0,237	62	0,693	68	0,960	74	0,999
45	0,002	51	0,042	57	0,303	63	0,761	69	0,975	75	0,999
46	0,003	52	0,064	58	0,377	64	0,821	70	0,985	76	1,000
47	0,006	53	0,093	59	0,457	65	0,870	71	0,992	77	1,000

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,7$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
50	0,000	56	0,002	62	0,053	68	0,367	74	0,837	80	0,991
51	0,000	57	0,004	63	0,080	69	0,451	75	0,886	81	0,995
52	0,000	58	0,007	64	0,116	70	0,538	76	0,924	82	0,998
53	0,000	59	0,012	65	0,163	71	0,623	77	0,952	83	0,999
54	0,001	60	0,021	66	0,221	72	0,704	78	0,971	84	1,000
55	0,001	61	0,034	67	0,289	73	0,776	79	0,984	85	1,000