Lösungen Stochastik vermischt II

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz 1 € betragen.

E2 Ergebnisse

a)

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b)

(1)	Höchstens 3 mal Wappen	$P(X\le 3)=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$
(2)	Weniger als 3 mal Wappen	$P(X<3)=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0{,}5}}$
(3)	Mindestens 1 mal Wappen	$P(X\ge 1)=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0{,}96875}}$
(4)	Mehr als einmal Wappen	$P(X>1)=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$

E3	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%.

E4	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%.

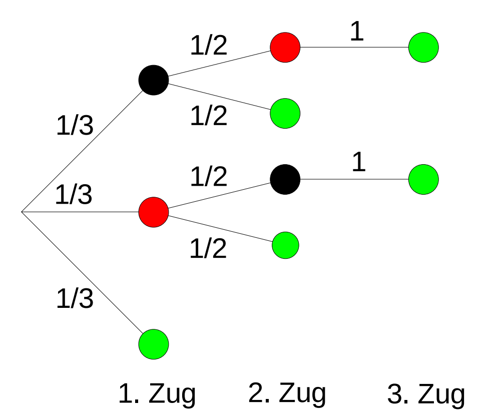
E5	Ergebnisse	
	a)	Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%.
	b)	Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%.

E6	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%.

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeiten dafür eine grüne Kugel zu ziehen.



Zug	Ergebnisse	P	Ausspielung X
1	(g)	$\frac{1}{3}$	$2\,€$
2	$(sg);(rg)$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$1€$
3	$(srg);(rsg)$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$0\,€$

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{1}}$$

Der Erwartungswert der Ausspielung ist E(X) = 1.
Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz 1 € betragen.

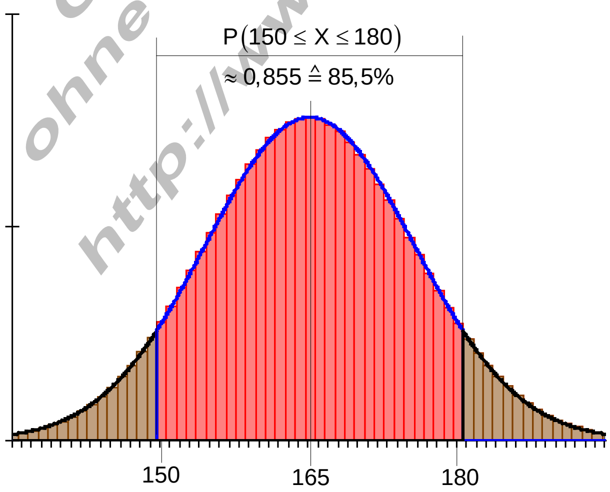
A2 Ausführliche Lösungen

a) Das Problem kann als 5 – stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden mit n = 5 und p = 0,5. Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

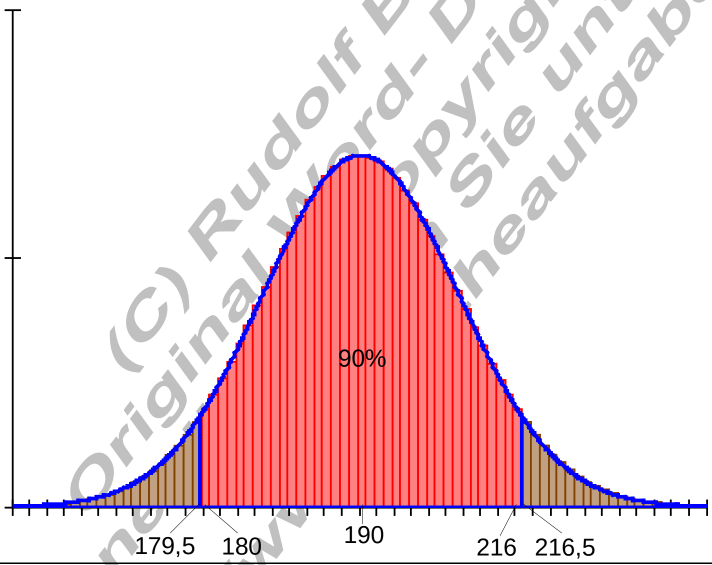
k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}=0{,}03125$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}=0{,}15625$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}=0{,}3125$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}=0{,}3125$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}=0{,}15625$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}=0{,}03125$

A2	b)	(1)	Höchstens 3 mal Wappen bedeutet: $P(X \le 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$
		(2)	Weniger als 3 mal Wappen bedeutet: $P(X < 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{16}{32} = \underline{\underline{0{,}5}}$
		(3)	Mindestens 1 mal Wappen bedeutet: $P(X \ge 1) = \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = \underline{\underline{0{,}96875}}$
		(4)	Mehr als 1 mal Wappen bedeutet: $P(X > 1) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$

A3	Ausführliche Lösung
	$n = 500$, $p = 0{,}33$ $\Rightarrow$ $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}33 = 165$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{165 \cdot 0{,}67} = \sqrt{110{,}55} \approx 10{,}514 > 3$ $[\{ \ldots 150 \ldots 165 \ldots 180 \ldots \}]$ Intervall ist symmetrisch zum Erwartungswert $P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)^{*)}$ $\Rightarrow$ Radius um den Erwartungswert: $r = \mu - 149{,}5 = 165 - 149{,}5 = 15{,}5$ $\frac{r}{\sigma} = z = \frac{15{,}5}{\sqrt{110{,}55}} \approx 1{,}474 \Rightarrow r = z \cdot \sigma \approx 1{,}474 \cdot \sigma$ $P(150 \le X \le 180) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = P(\mu - 1{,}474 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}474 \cdot \sigma)$ $z = 1{,}474 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,858 $\underline{\underline{P(150 \le X \le 180) \approx 0{,}858 \quad (85{,}8\%)}}$ Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%.

A3	

A4	Ausführliche Lösung
	$n = 550$ $\Rightarrow$ $\mu = n \cdot p = 550 \cdot 0,36 = 198$
	$p = 0,36$ $\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{198 \cdot 0,64} = \sqrt{126,72} \approx 11,257 > 3$
	$P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = 0,90$
	Der dazugehörige z- Wert wird aus der Tabelle abgelesen für $P = 0,90$
	$z = 1,64 \Rightarrow$ Umgebungsradius: $r = z \cdot \sigma \approx 1,64 \cdot \sqrt{126,72} \approx 18,46$
	$\mu - z \cdot \sigma = 198 - 18,46 = 179,54 \approx 180$
	$\mu + z \cdot \sigma = 198 + 18,46 = 216,46 \approx 216$
	Das Intervall soll symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 198$ liegen.
	Wir wählen: $P(180 \le X \le 216)$
	Es ist zu prüfen, ob das Intervall $\{180...198...216\}$ der Forderung (90%) entspricht.
	$P(180 \le X \le 216) = P(179,5 \le X \le 216,5)$
	$r = 18,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{18,5}{11,257} \Rightarrow r \approx 1,64 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,64$
	$P(180 \le X \le 216) \approx 0,899$
	Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%.

A4	

A5 Ausführliche Lösung

a)

$$n = 300 \quad p = 0{,}56 \quad \Rightarrow \quad \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}56 = 168$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{168 \cdot 0{,}44} = \sqrt{73{,}92} \approx 8{,}598 > 3$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für das Intervall [0 ; 161].
Aus der Tabelle kann nur die Wahrscheinlichkeit für ein um den Erwartungswert
symmetrisches Intervall abgelesen werden, dieses enthält die Werte [162 .... 168 ... 174]. Daran anschließend folgt das
Intervall [175 .... 300], welches aus Symmetriegründen die gleiche Größe wie
[0 ; 161] hat. Es gilt folgender Ansatz:
[{ 0 ... 161 } {162 ... 168 ... 174 } { 175 ... 300}]

$$P(X < 162) = P(X \le 161) = \frac{1}{2}\left[1 - P(161{,}5 \le X \le 174{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 168 - 161{,}5 = 6{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{6{,}5}{\sqrt{73{,}92}} \approx 0{,}756 \Rightarrow r \approx 0{,}756 \cdot \sigma$$

mit $z \approx 0{,}76$ wird

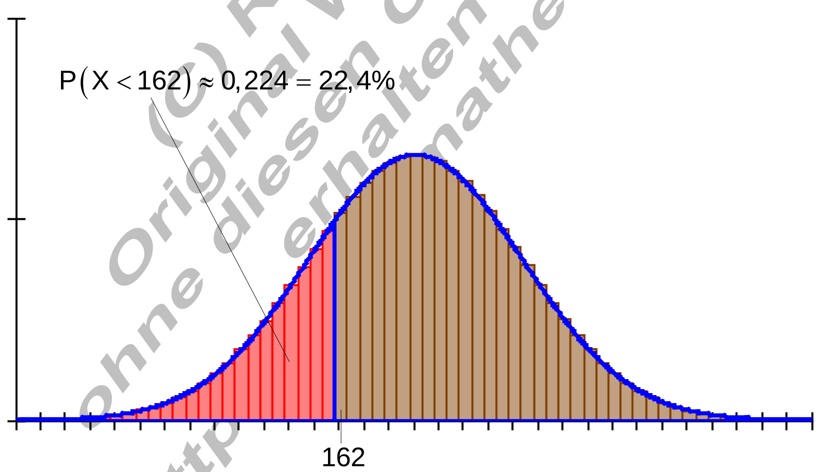
$$P(161{,}5 \le X \le 174{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}553$$

und damit wird

$$P(X < 162) \approx \frac{1}{2}[1 - 0{,}553] = \frac{1}{2} \cdot 0{,}447 = \underline{\underline{0{,}2235}}$$

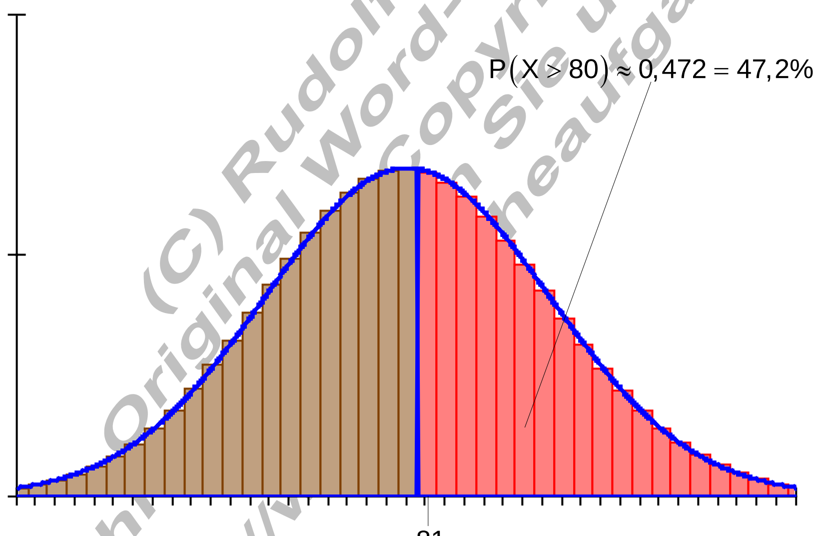
Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%.

A5 a)



A5	Ausführliche Lösung
	b) $n = 240$, $p = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\mu = n \cdot p = 240 \cdot \frac{1}{3} = 80$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} \approx 7{,}303 > 3$
	$\left[\{\,0\ \dots\ 79\,\}\{79{,}5\ \dots\ 80\ \dots\ 80{,}5\,\}\{\,81\ \dots\ 240\,\}\right]$
	$P(X > 80) = \frac{1}{2}\left[1 - P(79{,}5 \le X \le 80{,}5)\right]$
	Radius: $r = 80 - 79{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{0{,}5}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \approx 0{,}068 \Rightarrow r \approx 0{,}07 \cdot \sigma$
	mit $z \approx 0{,}07$ wird
	$P(79{,}5 \le X \le 80{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}056$
	und damit wird
	$P(X > 80) \approx 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}056) = 0{,}5 \cdot 0{,}944 \approx \underline{\underline{0{,}472}}$
	Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%.

A5 b)



A6 Ausführliche Lösung

$n = 180 \quad p = 0{,}55 \quad \Rightarrow \quad \mu = n \cdot p = 180 \cdot 0{,}55 = 99$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{99 \cdot 0{,}45} = \sqrt{44{,}55} \approx 6{,}675 > 3$

bestimmen Sie $P(89 \le X \le 104)$

$\left[\{ 89 \ldots 93 \} \{ 94 \ldots 99 \ldots 104 \} \{ 105 \ldots 109 \} \right]$

Ansatz: $P(89 \le X \le 104) = P(89 \le X \le 93) + P(94 \le X \le 104)$

$P(89 \le X \le 93) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) - P(94 \le X \le 104) \right]$

$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) - P(94 \le X \le 104) \right] + P(94 \le X \le 104)$

$= \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) + P(94 \le X \le 104) \right]$

$P(89 \le X \le 109) = P(88{,}5 \le X \le 109{,}5)$

$r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{10{,}5}{6{,}675} \approx 1{,}57 \Rightarrow r \approx 1{,}57 \cdot \sigma$

$P(89 \le X \le 109) \approx 0{,}884$

$P(94 \le X \le 104) = P(93{,}5 \le X \le 104{,}5)$

$r = 5{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{5{,}5}{6{,}675} \approx 0{,}82 \Rightarrow r \approx 0{,}82 \cdot \sigma$

$P(94 \le X \le 104) \approx 0{,}588$

$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}\left[0{,}884 + 0{,}588 \right] = 0{,}736$

Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%.

A6